

PET. LAVREMBERG
ROSTOCHIENSIS
INSTITUTIONES ARITHME-THICÆ.

In quibus

ACCURATA METHODO ET facili Compendio, non tantum vulgarium numerorum, & minutiarum Astronomicarum ratio, sed etiam doctrina Proportionum, & subtilissima ALGEBRÆ fundamenta, perquam dilucidè proponuntur, & ita explicantur, ut jam à quovis intelligi sine difficultate possint.

Accessit Appendix de Arithmetica per Circinum proportionalem compendiose demonstranda, & usui accommodanda.

Editio secunda Auctior & Correctior

Impensis PHILIPPI FUHRMANNI, Bibliop. Lipsiensis.

JENÆ.

Typis GEORGII SENGENWALDI.

Anno M DC LIX.

ILLUSTRISSIMO, CELSISSIMOQUE PRINCIPI AC DOMINO,

DN. FRIDERICO,

HÆREDI NORVEGIÆ, DUCI SLESVIGÆ, HOLSATIÆ, STORMARIÆ ET DITHMARSIÆ: COMITI IN OLDENBORG ET DELMENHORST, &c.

ILLUSTRISSIME PRINCEPS, DOMINE CLEMENTISSIME,

Queri solent homines, quòd hoc seculo aut omninò pauca reperiantur lumina solidæ & absolutæ eruditionis, aut multò inferiora antiquis. Quotusquisque nunc seu Hippocratis

ſeu Platonis ad ſummam proceſſit? Quis ſubtilitate Ariſtotelem, elegantiâ Galenum, ubertate Plutarchum adæquat? Nimirum quia pauci veram inſiſtunt viam, qua itur ad delubrum Sapientiæ. Olim è nativo fonte, è Μαθήσι, diſciplinis ſic verè & meritò dictis Mathematicis, rudes adoleſcentium animi, jam à prima infantia, hauriebant puriſſimum liquorem penitioris Philoſophiæ, quo ſemel perfuſi ad intimam ſapientiæ cryptam ſeſe penetrabant commodius, haut ſecus ac panni glaſto inebriati promptius hauriunt purpuriſſum aut

meli-

melinum, Nunc hac consuetu-
dine ad internecionem occisâ,
& velut densâ nube obductâ,
harum literarum sidus, marcor
& contemptio: vernulæ & Græ-
cæ Mathesios neglectus, quasi
pestilens sidus afflavit animos
plerorumque. Quis ignorat,
Arithmeticam & Geometri-
am, reliquamque eruditi pul-
veris progeniem, descivisse ab
illâ vetere gloriâ, non inopiâ
hominum, sed (ut dicam cum
Quintil.) desidiâ juventutis, &
negligentiâ parentum, & insci-
tiâ præcipientium, & oblivio-
ne moris antiqui. Ut primi illi
mortales & macrobii & sani-

robustique, ea potissimum de causa fuisse creduntur, quod virtutes herbarum, quas exactè noscebant, mendum naturæ statim corrigebant & sine molestia. Pariter prisco illo ævo, cum suus Mathesi honos, suus cultus constaret, non tantum plura lætaq; floruit sapientia, sed & spoliatam ignorantiæ nævis mentem plerique possederunt. Hodie, quia ludibrio sunt hæc studia, itaq; eruditionis penuria, & inepta proficiendi ratione velut morbis laboramus. Hodie, quia nihil propemodum retinent hæc studia ex pristinâ majestate, præ-

ter umbram magni nominis, itaq; veram eruditionem *fru-stra sublatã ex oculis quærimus invidi*. Apud Platonem in Menone, Socrates adolescentem quendam interrogavit, de nõnullis ad Quadrati dimensionẽ attinentibus, ad quæ ille initio quidem pueriliter, paulatim tamen exercitã mente ea respondit, quæ reposuisset Geometra etiam cultissimus. Isto argumento quamquam Plato stabilitum velit, suum & Pythagoræ de Reminiscentia dogma, hominisque antiquam sciẽtiam, per socii corporis contagionem obliteratam, unius

ope Mathesios quasi postlimi-
niò revocari in lucem, & resti-
tui incolumitati pristinæ: O-
stendit tamen etiam vel maxi-
mè, Mathematicorum disci-
plinarum exercitiis, veluti co-
te, poliri & exacui intellectum,
ut postmodum instar ancipitis
gladii nihil non penetret, etiam
subtilissimum, etiam arduum
maximè & difficillimum, ad
quod hebescere retundiq; ne-
cesse est obtusam acie eorum,
queîs à neglectu Mathesios *fri-
gidus obsistit circum præcordia
sanguis.* Quemadmodum enim
illis, qui è tenebroso carcere
demissi meridianum Solem fi-

xo

xo obtutu intuentur, videndi ferè vigor extinguitur: ita qui sine mediatrice & anteambulone Mathesi, à Rebus corporeis ingenium protenus attollunt ad sublimia, eaque quæ cum materia & sensibus divortium fecerunt, dubium nullum est, quin nimio istorum splendore occæcati, quantillam adhuc possidebant nobilioris igniculi portionem, eam dispérdant penitus. Nemo absq; his scientiis sperare sibi, nemo impetrare habet, aut conscendere fastigium perfectæ eruditionis; non magis quam sallipotentis Neptuni cœruleos campos, ut

Accius, ait, trajiciat absque equo ligneo. Apud Persas, referente in Artax: Plutarcho, nulli licebat Regia dignitate potiri, nisi qui comedisset Placentam ex ficubus & therebinthina, bibissetque crama ex aceto & lacte: Ad eundem modum, neque ad antiquos sapientiæ Professores, & eorum ad gymnasia ulli concessum erat discēdi gratia invisere, nisi qui degustasset fundamenta doctrinarum Mathematicarum. Nota est famosissima illa Platonis Lex, inscripta Academiæ vestibulo, οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Notum & illud Philosophi Chal-

Chalcedonii; quod cuidã di
Mathesios ignaro, Ludum s
frequentare cupienti ; ἔτ
παρ' ἐμοί κόπ⊙ ἐ κνάπ̓ ̓ἰ ̓ἰ ε ὶ ̓ α
Haut tinguntur apud me vell
ra ista. Dicam etiam amplius
Apud Ægyptios nec sacerd
tes fiebant, nec Pontifices; apu
Lacedæmonios nemo adm
vebatur ad clavum Reip. apu
Persas nemo salutabatur Re
qui Mathematum non ess
perquam gnarus ac sciens. A
que ædepol velut his artib
instructi, non tantum qanti
judicabantur precii & hon
tis, sed etiã apti qui divina h
manaque omnia, etiam ipsu

quirent *æthera*, ut Poëta canit, *ingenio suppoſuiſſe ſuo*: Ita exadverſim, vel ob deſidiam, vel fatalē genii & indolis tarditatem ab iiſdem averſi, cenſebantur degeneres Mundi incolæ, nomina ſeculo inficianda; hoſtes bonæ mentis; propudia, portenta, & abortus literarum. Non citabo huc ad teſtimonium partes cæteras, Arithmetica præcipuè ad rem & cauſam præſentem attinet, quam tanti æſtimarunt veteres, ut quæſiti, Quid homo eſſet? reſponderint, Animal quod ſciat numerare. Quaſi Ratio & perſpicax numerandi facultas juxtà ambulent.

bulẽt. Memorabile eſt Platonis verbum in Epinomide, quo vir ille divinus pronunciat, hominem Arithmetices imperitum, ἀνόητόν τε, καὶ ἄφρονέστατον εἶναι. Elegantiùs adhuc in Republ. Quid vero, ait Socrates, nunquam animadvertiſti, qui natura Arithmetici ſunt, eos ad omnes artes percipiendas perſpicaces & acutos eſſe? Tardi verò & hebetes, ſi in hoc ſtudio exerceantur, ſi nihil aliud emolumenti capiant, ſaltem promptiores & acutiores fieri? Quod ad hoc Platonis ſeu judicium, ſeu Præceptum, ſollicite admodum liberorum ſuorum inſti-

tutionē composuerint Romani, testis est Horatius.

Romani pueri longis rationibus assem
Discunt in partes centum deducere. Dicat
Filius Albani, si de quincunce remota est
Vncia, quid super est? Poteras dixisse triens. O
Rem poteris servare tuam. Redit uncia: quid fit? Semis.

Celebris est & satis decantata Thracum stupiditas, qui labore improbo, magnoque conatu, vix ad quatuor usq; numerabant: & Meletidis, qui toto ingenii captu non sciebat ultra

quin-

quinque. Tantum inter disciplinas cæteras caput extulit scientia numerorum, ut vel ingenio valentē faciat, vel imbecillem; acumen rationis vel arguat ponatq; , vel tollat, aut certè subleſtum indicet. Quamquam fortaſſis quid illa valeat, aliquis è Mercurialiū grege virorum, melius dixerit quam pauper Philoſophus: Huic enim, quos utēdos locet, nummi rari ſunt: illi, non jam centena millia, ultra quæ non erat apud antiquos Romanos numerus, ſed decies centina millia aut ſæpius numerant: Non tamen iſtâc ſaltem fini, illove pede ſtat nativa

ejus

ejus generositas. Pace vestrû dicam, injuriam fecistis sapientiæ vos, qui Arithmeticam sordidam, & intra usus tantum quotidianos necessariam existimatis. Militat illa non fœnori præcipuè, aut nummo percusso, (cui succisivas saltem operas locat) sed in gratiam nobilioris Patroni, qui ANIMUS est, & hujus Philosophica ac spiritalis perfectio. Si quæritis exemplum, videte Syracusanum senem, *quem maris & terræ numeroq; carentis arenæ Mensorem perhibent*, quam ille ingeniosè Arithmetices ratiocinio collegerit numerũ arenæ, non ejus-

mo-

modo quæ maria lamberet, sed & ejus quam includeret universum Mundi domicilium, a medioximo telluris pavimento, adusq; extremũ cœli dorsum. Videte eruditos Astronomorũ filios, qui numerorũ adminiculis capacitatẽ, distantiã, metas atq; orbitas mẽsurant supremi illius laquearis, quod verticibus nostris imminens, non tantũ videndi aciem sed & ipsius naturæ limites claudit; Qui numerorũ adminiculis antevertunt Astricorũ civiũ pernicissimas rotationes: numerorũ adminiculisq; orbi annunciant, etiã post aliquot secula venturos Lunæ Solisq;

lisq; labores, annorũ mensiũq; vias, & totius exercitus cœlestis horribilia secreta. Hi sunt, dicente Socrate, quasi decẽ mille oculi Argi, quib9 nihil absconditũ, nihil invium: queis omnia patent quæcunq; Maximus orbis habet. Hæc est ala altera Platonica, qua subvecta mens nostra, & sublimis excelsaq; facta, ipsa sibi occurrit, & emancipatò corporis cõtubernio, cũ terrã infra se contemnit, tum operi intẽta suo, quidquid mirãtur homines id oblivisci gaudet. Libera vero & vicina Deo orbẽ omnẽ peritat, & vel cœlestib9 globis affixa motũ quoq; illorum imitari discit.

Ex-

Excellentis hujus disciplinæ systema ILLUSTRISSIME PRINCEPS, ad verã methodũ scientiarum nuper à me extructũ, ad C.V. pedes hîc submissè depono: exile sanè donarium, & vix dignũ vestris pulvinaribus: sed quod index & argumentũ esse possit animi, gestientis servitiũ atq; obsequium suũ consecrare tam benigno eruditæ gentis Mecœnati, â cujus vultu & sermone nullus unquã probus recessit tristior. Omnia cõsequutus fuero, & cum Lyrico *sublimi feriã sydera vertice*, si C.V. non fuerit dedignata hunc hominẽ inter cultores suos admittere,

huic

huic libello aliquem indulgere locum, inter tot illustres cives, quorũ corpora naturæ concesserũt, animarũ vero imago expressa est in securissimo litterarũ sacrario, sapiẽtiæ totius prytaneo, & quasi capitolio: in admirabili illo vestro supellectilis librariæ penu. Deus omni copia virtutũ, gloriæ, felicitatis, C. V, exornet, & quam diutissimè rebus mortalium interesse, ac felicissimè præesse patiatur. Hamburgi. Octob. CIↃ.IↃCXXI.

C. V.

Submiss. H.

PET. LAUREMBERG. PH. & Med. D. & Prof. apud Hamburgens.

LECTORI BENEVOLO.

Iamdudū tibi debeo, amice Lector, Heliconem meum, vel Institutiones præcipuarum disciplinarū Mathematicarū, quas publicæ utilitati me consecraturū in Lauru meâ Delphica spopondi. Et verò nisi me impedivissent ex transverso incurrentia quædam impedimenta Laborum Medicorum, jam pridem liberassem fidē datā. Nunc, quia ita tulit occasio, habeto hoc systema Arithmetices, primum totius operis prodromū, & quasi crus alterū Mathesios; quod paulo post paßibus æquis sequetur Geometria, tum postmodū Geographia, Astronomia, Astrologia,

logia Musica, Optica, Geodesia, Architectonica, & si quid praeterea de genere hoc. Has, inquam, sciĕtias ad Methodũ Philosophiæ Peripateticæ adornatas, cum Bono Deo, imposterũ expecta, & affectus atq; conatibus meis fave, qui nihil magis habeo in votis, quã ut omne studium, adeoq; hic ipse spiritus militent in spĕ publici emolumĕti. Multa in iis invenies non vulgata prius: Vulgata verò, tali ordine tradita, qualem requirit scientiarũ nobilitas. Ad hanc Arithmeticã quod attinet ingenuè & liberè profiteor, non omnia in eâ cõtineri, quæ de Numeris quoquo modo doceri possũt.

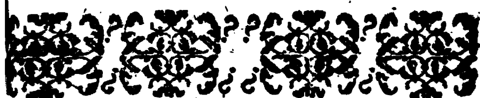
Quis

Quis n. tam uberem messem inferret in horreũ adeò exile & angustum? Sed solum præcipua, nobiliora, magisq́ necessaria; quibus Philosophiæ studiosus carere omnino non potest, non magis quã Medicꝰ suâ Pathologiâ. Nam ut dicam quod censeo, non mihi placent illi, qui Philosophi appellari gaudent, & tamen Arithmeticæ, Musicæ, cæteræq́ Mathesios sũt ignarißimi: quasi Philosophiæ particula non æq́ sit Mathesis ac Physica, Metaphysica, aut Ethica? Cum te Philosophum dicis, unâ operâ fateris te Arithmeticũ. Nisi volueris titulũ tuũ prostituere, oportet Numerorum scientiâ

imbu-

imbuisse animum, alioquin idē tibi eveniet, quod pecori Arcadico Leoninam induto, quod aliud erat, aliud volebat videri. Nullus dubito, quin hoc succisivo labore aliquam lucem præbuerim Arithmeticæ studiosis, qui fundamentis his cognitis, facilè suopte ingenio & Marte intelligunt subtiliora theoremata, quæ de Numeris Euclides in Elementis, & alii annotarunt. Sed & hoc, quin te moneam, amice Lector, facere non possum; ut si qui inter imprimendū typorum errores irrepserunt, eos benevolè emendare non graveris. Ipse facile æstimare habes, quod nunquā ita quisquā benè subductâ ratione ad hujusmodi laborē fuit, quin semper aliquid interlabatur, quod nolis: aliquid accidat, ut illa, quæ te probè correxisse credas, neglecta sint: & quæ affabrè putaris emēdata, in relegendo ut repudies.

PET.



P. LAUREMBERGI.

INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM.

PARS COMMUNIS.

De Communibus numerorum affectionibus.

LIBER I.

De numeris integris absolutè consideratis.

CAPUT I.

1. *Arithmetica est scientia.*
2. *Ejus variæ appellationes.*
3. *Definitio.*
4. *Divisio in Theoricam & Practicam: item in quatuor species rejicitur.*
5. *Legitima Arithmetices divisio in partem Communem & propriam.*
6. *Partitio totius systematis in libros quinque.*
7. *Quibus exemplis utemur.*

A 1. Arith-

I.


Rithmeticam, cæterasq; eruditas Matheseos filias, nativâ facie depicturi, illud hîc primo ingressu præstitutum suppositumque imus, quod in Pædia nostra Philosophica, & alibi à nobis est demonstratum, esse eas de genere legitimarũ & verè dictarum *scientiarum*, quarum universa compages ut plurimùm nititur fundamentis tribus, *Subjecto, Principiis, & Affectionibus*: nonnunquã & quarto, *Speciebus* scilicet subjecti. *Subjectum* illud est, quod toti disciplinæ substernitur, de quo sciri atque demonstrari solent ea, quæ ignorantur. *Principia vel causa* sunt media atque instrumenta jam ante nota, quorum beneficio ignota sciuntur. *Affectiones* sunt proprietates vel accidentia incognita, quæ sciri atque demonstrari possunt de subjecto per principia. Præter hæc nihil est, quod includant aut circumscribant ullius scientiæ limites; nec quidquam ad scientiam quoquo pacto pertinet, quod

quod non sit aliquid illorũ trium. Hæc vera est Methodus, hæc regia tutaq; semita constituendæ atq; adornandæ, nõ Arithmeticæ solùm, sed omniũ omnino scientiarum, abs qua qui exorbitãt, & per, nescio quæ, diverticula vagãtur, illi partim ipsi transversim acti πρέχουσιν, ut habet Plato, ἐκτὸς τῆς ὁδοῦ: partim secum juxta seducunt incautos atq; inscientes adolescentum animos. Ad legem horum trium, vel etiam omnium quatuor, jam protenus constituere conabor Arithmeticam, quam primum præloquutus fuero pauca, quæ hujus scientiæ studiosum nescire nefas est.

2. Hanc ipsam numerorum doctrinã Plato, Socrates, & Archimedes λογιστικὴν vocarunt. Arabes & nonnulli Barbarorum, *Algorithmum*. Inter *Arithmeticam*, & *Logisticam* Platonis Interpretes posuerunt discrimen aliquod, scripseruntq; Logisticã esse vocẽ scientiæ: Arithmeticam nomen Artis: quasi is Logistes sit, qui numerorum naturã mente suâ contemplatur; numerorum scilicet abstra-

ctim sumptorum, facta à rebus ipsis sequestratione. Arithmeticus verò, qui nummos, homines, pecudes numerat; qui numerum adplicat ad res ipsas numerabiles. Consimilem differentiam observari inter Geometram & Mensorem, inter Musicum & Cantorem; Atque illud evidenter conspici in libris Arithmeticis Euclidis, Nicomachi, Boëtii, Jordani. Nos verò *non existimamus* tanti hanc subtilitatem, ut vel solam Logisticæ vocem adoptemus, vel Arithmetices nomen exponamus, per tot sæcula Mathematicis usurpatum, probatumque tot lectis ingeniis. Quin *indifferenter* usurpabimus utrumque. Omnino quidem discernenda est *scientia ab usu scientiæ*, qui foris illi advenit, neque pertinet ad intimam ejus constitutionem. Sed tamen eâ gratia non est quod defraudemus scientiam apposito ac convenienti nomine.

3. Esto igitur ac vocetur seu Logistica, seu *Arithmetica*, *Scientia Numerorum quatenus sunt numerabiles*. Habes *definitionem*.

4. Accipe quoque pauca de ejusdem

Divi-

Divisione. Non sum nescius à quam plurimis hodiè Arithmeticam distribui in *Theoricam* & *Practicam*; forte ad exemplum Platonis, qui eam partitus est in *Arithmeticam Philosophorum* & *Vulgi*. A nonnullis verò in *species quatuor* famosas, *Additionem*, *Subtractionem*, *Multiplicationem*, *Divisionem*. De utraque ut ingenuè dicam quod censeo, *nec ista, nec hæc* à cordato Philosopho ferri aut acceptari meretur. *Non ista*: quia nec scientia ulla practica est per naturam, nec etiam dividi potest ab iis, quæ sunt extra illam. Dicitur verò practica ab usu. Usus verò externus scientiæ. Omnia quidem disciplinarum præcepta, Theoremata possident; usus & experientia πρᾶξιν, aut ποίησιν: At propterea non sunt duæ partes ejusdem scientiæ: Doctrina scilicet, & usus Doctrinæ. Sed & nos quærimus partitionem solius Arithmeticæ Theoreticæ. *Non posterior*: Præterquam enim quod impropriè dicantur species, (nec enim Arithmetica genus est, sub se complectens has species) cum partes revera sint; Insu-

per & nimis sunt angustæ, nec omnē Arithmetices latitudinē complectuntur. At verò omnis divisionis membra debent æquivalere toti. Sub hisce verò quatuor speciebus, quod nec Radicum extractiones, nec subtilissimæ proportionum aut Algebrarū contemplationes comprehendantur, quilibet Arithmeticus novit.

5. Quid impedit, quo minùs hæc scientia *bipartitò*, ut cæteræ ferè omnes, dividi queat in *Partem communem* & *propriam*? Nam non minùs numerus, quàm corpus naturale, aut mot⁹ cœlestis, vel generatim vel in specie cōsiderari potest. *Pars Communis* esto de Numero in genere, deq; ejus principiis & affectionibus Catholicis. *Pars propria* de primis quibusdā numeri speciebus. Universalis iterū numerus, vel absolutè atq; in se intelligitur, vel factâ cum aliis numeris collatione. Rursū absolutus numerus vel integer est, vel fractus. Hinc *triplex* emergit Communis Arithmetices quasi progenies; *Una* numerorū integrorū absolutorū: *Una* numerorū fractorum

abso-

absolutorum: *Usus* numerorum comparatorum, id est, proportionum. Numerus in specie attribuitur vel Minutiis Astronomicis, diciturque *Logistica Astronomica*; vel Cossicis, diciturque *Algebra*.

6. Itaque si in compendium conferantur omnia, *quinque partibus* (quibus totidem dedicabimus libros) hoc nostrum Arithmetices systema absolvetur.

I. De numeris integris absolutis;

II. De numeris fractis absolutis;

III. De proportionibus, vel numeris comparatis;

IV. De Algebra.

V. De Logistica, vel minutiis Astronomicis.

7. Harum explicatione dum occupabimus operas nostras, *exemplis* non quidem semper utemur abstractis, qualia postularet scientiæ puritas; sed sæpe etiam è mediâ vitâ petitis, quæ & acutiùs movent animos discentium, & tenaciùs hærent, & magis delectant. Eo ipso imitati Philosophos nostros, quibus familiare est, non literis Alphabeti, quod fecerat Aristoteles,

sed exemplis Theologicis, Medicis, Physicis, sua constabilire præcepta Logica.

CAPUT II.

1. *Quale subjectum Arithmetices.*
2. *Quid sit numerus.*
3. *Qid unitas.*
4. *Controversia de numero & unitate.*
5. *An numerus sit Quantitas discreta?*
6. *An unitas sit numerus?*
7. *Examinantur inepta quædam Arithmeticorum argumenta.*
8. *Unitas & punctum minus rectè comparantur, cum toto cælo differant.*
9. *Quare Aristoteles unitatem dixerit respondere puncto.*
10. *Quid puncto respondeat in numeris?*
11. *Variæ divisiones numerorum. Par, impar. Primus, compositus. Numerans, numeratus. Digitus, articulus, compositus.*

I.

UT jam semotis ambagibus invadamus in arcem ipsius Arithmetices; *subje-*

ctum

ctum primo loco explicari amat in scientiis; secundo *principia*; tertio *affectiones*; postremo *species*. *Subjectum* hic non aliud quam demonstrationis intelligitur, de quo aliquid sciri debet: cui jam olim duæ assignatæ sunt partes ab Aristot: Res considerata, & Modus Considerandi, seu ut Philosophi loquuntur, materiale & formale. Tale subjectum in Arithmetica constituimus *Numerum quà Numerabilem*; quæ Ratio formalis materiam consideratam segregat ab omnibus disciplinis aliis, addicatque soli Arithmeticæ. Eodem modo Metaphysices subjectum dicitur Ens quà Ens; Physices, Corpus naturale, quà naturale.

2. Hujus subjecti, Numeri, aliqua requeritur præcognitio, quam ita breviter accipe. *Euclides lib. 7. Def. 2.* definit *Numerum, multitudinem ex unitatibus compositam.*

3. *Unitas* vero, per *Lib. 7. Def. 1. Est secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.* Itaque Unitas numerus quidem non est, numeri tamen omnis initium & radix.

4. Recentiorum Mathematicorum quidam litem hic moverunt conatique sunt confuadere duplicem absurditatem. I. *Numerum non esse* Quantitatem *discretam, sed* multò magis *continuam*. II. *Unitatem* revera *esse Numerum*.

5. I. *Stevinus lib. 2. Def. 2. Arithmetic.* Gall. ita argumentatur. *Quidquid non est nisi una Quantitas, id non potest esse quantitas discreta. At sexaginta quæ sunt numerus, sunt una indivisa quantitas.* Igitur *sexaginta non sunt Quantitas discreta.* Quòd si mente concipias sexaginta esse divisa in totidem unitates, eâdem ratione (inquit Stevinus) fingere possum lineam divisam in partes totidem. Linea igitur non minùs est quantitas discreta quàm Numerus sexagenarius. Addit & illud: *Si numerus est quantitas discreta, quomodo simul possit esse Quantitas conjuncta & composita ex unitatibus?* Siquidem inter se pugnant & adversis frontibus concurrunt: esse conjunctum, & esse discretum. Excellenti huic Mathematico, quia non licuit esse versato in Logicis, aut Metaphysi-

physicis, nihil mirum si nescivit *etiam in rebus discretis* dari ἕνωσιν, *conjunctionem, & ordinationem*, per quam unæ sunt, neque tamen continuæ sed discretæ: de qua controversia pertractatum à nobis est, Comment. & Exercit. in Organ. Aristotel. Cap. de Quant.

§. II. *Alteri Paradoxo* ansam præministravit primam *P. Ramus*. Ramum *Stevinus* dicto loco juvit argumentis, quæ sunt hujusmodi. 1. *Pars* ejusdem naturæ est cum toto: Unitas est pars Collectionis Unitatum, seu multitudinis. Ergo & ejusdem naturæ cum multitudine. At multitudo numerus est. Ergo & Unitas. 2. *Ex dato numero, si nullus numerus auferatur, remanet numerus idem.* Ex datis tribus si abstrahatur unitas, quæ non est numerus, remanebunt tria quantumvis ablatâ unitate. Id verò ἄλογον. Non sunt hæ rationes tam validi roboris, quàm primâ fronte videntur. Nam, quod attinet *ad* 1. Propositio argumenti vera est in iis, quæ sunt ὁμοιογενῆ & similaria: ut aquæ quælibet pars aqua est; auri aurum: falsa in iis

quæ dissimilaria & ἑτερογενῆ. Capitis quælibet portio, non est caput: nec arboris arbor, nec hominis homo. Tale quid & numerus est. Nam ternarius ipsa re differt ab unitate. Specie enim differunt numeri, quam accipiunt ab unitate ultima, quæ sicubi, vel additur vel aufertur, mutatur numeri species. Itaque nec quælibet pars ternarii erit ejusdem naturæ cum ternario. *Ad 2.* Unitatem non numerum, sed partem numeri esse affirmo. Sic igitur retorqueo. Ex integro si partem abstuleris non manet integrum. Homo capite aut thorace orbatus, desinit esse homo, quanquam nec caput homo sit nec thorax. Si abs ternario abstuleris unitatem, non manet ternarius. Unitas igitur, licet numerus non sit, ablata tamen à numero eum imminuit: quia numeri non solum initium est aut finis, sed etiam pars: Ipsa interim Numerus non est. Pars vero ablata à Toto, non relinquit Totum. Ergo nec unitas abstracta à tribus, relinquit tria. *Caterum* unitatem è numero Numerorum expungit hoc argumentum. *Omnis Numerus est*

mul-

multitudo, per Def. 2. l. 7. Euclid. At *unitas multitudo non est*: Illa enim indivisionem hæc divisionem includit. *Unitas ergo non est numerus.*

7. Scio etiam *alia* afferri solere argumenta in rem præsentem, probantia unitatem non esse numerum. Sed quæ mihi videntur non posse sufferre solem subtilioris Philosophiæ. Ex illorum genere hæc sunt. 1. Omnis numerus potest dividi in partes: quia est quantitas: Unitas vero dividi nequit, quia composita non est, sed simplicissima. 2. Qualiter se habet punctum ad magnitudinem, ita unitas ad numerum. At punctum magnitudo non est. Itaque nec unitas est numerus. Primum horum falsitatis damnant omnes eruditi Arithmetici, qui unitatem in partes secernunt dimidias, tertias, quartas. Ex divisione Unitatis velut ex Oceano fluit universa Fractionum subtilitas, quemadmodum demonstratur, à *Diophant. lib. 4.* q. 33. Et lib. 5. q. 12. 14. 15.

8. Quæ in argumento secundo proponitur *analogia unitatis & puncti*, ea

mihi semper *suspecta* fuit, quamvis auctores agnoscat egregios. Nimis longum latumque est discrimen inter duo ista, quam ut conferri mereantur. 1. Unitas est pars constituens componensque numeri. Nam ex tribus Monadibus confit ternarius. At punctum nullam componit magnitudinem. Ex centenis millibus punctis, ne quidem brevissimam conficies lineam. Divisibile enim ex indivisibilibus non componitur. 2. Omnis unitas potest frangi, dividique in partes minutiores. Nullum punctum dividitur; quippe prorsus *ἄτομον*. 3. Unitas incipit finitque omnem numerum. At punctum nec inchoat, nec terminat omnem magnitudinem. (non enim superficiem aut corpus) sed solam lineam: Imo ne lineam quidem omnem, (non enim circulum, aut Ellipsin, aut conchoidem) sed solam rectam finitam. Pulcra sunt, quæ de Unitate in hanc sententiam leguntur apud *Proclum*. *Arithm*. Ἀνάριθμος πηγὴ ἀριθμῶν· καὶ ἀριθμὸς οὐκ ἔστι, ξυνετικὴ ἐστιν ἀριθμῶν· πηγὴ καὶ ῥίζα καὶ ἀφορμὴ πλήθους παντὸς, εἰκόνα σώζουσα

θείου,

θεὸς, ὁ μηδὲν ὂν τῶν ὄντων (ἐστὶ δ' οὐ) ὅμως τῶν ὄντων ποιητικόν. Ait Numen seu Deum non esse Ens, quia est supra Ens, & potius ὑπερουσίας quàm οὐσία.

9. Hic tamen non nemo dubius quæret: 1. Quo fundamento *Aristotel. cum puncto unitatem* comparaverit? & quo sensu *nostri Mathematici* profiteantur, sic punctum esse principium magnitudinis, quemadm. Unitas est principium numerorum? Fortè ita *excusari* hi viri possunt, si dixerimus, Punctum principium esse, *non compositionis*, (ut unitas Numeri) nullum enim divisibile componitur ex indivisibilibus, docente Aristot: *sed generationis*, seu ut appositiùs dicam, fluxus. Nam punctum motu vel fluxu suo fingitur generare lineam.

10. Quæret aliquis *secundò*: Quid ergo sit, quod puncto respondere possit in numeris? Credibile enim est, velut in tempore momentum, in magnitudine punctũ, sic innumero dari aliquid, insectilibus istis proportione comparandum? Dicam, quid *Stevinus* excogitârit libello Gallico, de qua

de qua tamen re cuilibet arbitrari liberum erit. Putat is, idem in numeris esse *Cyphram*, quod in magnitudine *punctum*; in tempore τὸ νῦν. 1. Ut punctum lineæ quidem adjungitur, ipsum tamen linea non est; Ita Cyphra numero adjungitur, ipsa verò non est numerus. 2. Ut punctum in partes secari nequit, ita nec Cyphra: 3. Ut infinita puncta nullam conficiunt lineam, ita nec infinitæ Cyphræ numerum: 4. Ut linea A.B non extenditur additione puncti C; ita nec Numerus senarius, accrescit adjectione Cyphræ.

A——B 6 C——D. E. 60.
. 0.
C

5. Ut linea C D. in E usq; producta, augetur & extenditur adminiculo puncti E; ita numerus 6, si fuerit productus in Cyphram usque, tum augetur per Cyphram, fiuntque 60. (Hæc analogia nauci & nihili est. Vim enim facit Axiomati; Ex indivis. non fit divis.) 6. Idem probat ex Tabulis sinuum Regiom: in quibus gradus quilibet est arcus obliquus, cujus longitudo $\frac{1}{360}$ peti-

peripheriæ Circuli. Cujuslibet verò gradus initium & finis est punctus Mathematicus. Jam initio gradus, seu puncto primo quid respondet in Tabulis? Non certè unitas, sed Cyphra: nisi illustres Mathematicos, imo ipsam naturam errasse dixeris. Sinus unitatis (gradus unius) est 526265. At sinus Cyphræ est 523360.

II. *Divisiones numerorum*, quibus hæc, quam profitemur, Arithmetices constitutio juvatur, partim ex trivio, partim ex Euclide, partim ex Prædicamentis cognitas, perspectasque supponimus. In illis familiares sunt Partitiones Numeri I. in *Parem* & *Imparem*. *Par* est, qui bifariam dividitur Eucli. l. 7. def. 6. ut, 4. 8. 10. 12. *Impar* (def. 7.) qui unitate differt à pari ut 3. 5. 7. 9. 11. II. In *pariter parem*, & *pariter imparem*. *Pariter par* est (def. 8.) quem par metitur per parem, ut 32. mensurant 8. per 4. *Pariter impar* (def. 9.) quem numerus impar metitur per imparem, ut 15. mensurant 5. per 3. III. Sic porrò Numerus est vel *Primus* vel *Compositus*. *Primus* est (def. 11.) quem unitas sola metitur, ut 2. 3. 5.

Com-

ſed exemplis Theologicis, Medicis, Phyſicis, ſua conſtabilire præcepta Logica.

CAPUT II.

1. *Quale ſubjectum Arithmetices.*
2. *Quid ſit numerus.*
3. *Qid unitas.*
4. *Controverſia de numero & unitate.*
5. *An numerus ſit Quantitas diſcreta?*
6. *An unitas ſit numerus?*
7. *Examinantur inepta quædam Arithmeticorum argumenta.*
8. *Unitas & punctum minus rectè comparantur, cum toto cœlo different.*
9. *Quare Ariſtoteles unitatem dixerit reſpondere puncto.*
10. *Quid puncto reſpondeat in numeris?*
11. *Variæ diviſiones numerorum. Par, impar. Primus, compoſitus. Numerans, numeratus. Digitus, articulus, compoſitus.*

I.

UT jam ſemotis ambagibus invadamus in arcem ipſius Arithmetices; *ſubjectum*

ctum primò loco explicari amat in scientiis; secundò *principia*; tertiò *affectiones*; postremò *species*. *Subjectum* hic non aliud quam demonstrationis intelligitur, de quo aliquid sciri debet: cui jam olim duæ assignatæ sunt partes ab Aristot: Res considerata, & Modus Considerandi, seu ut Philosophi loquuntur, materiale & formale. Tale subjectum in Arithmetica constituimus *Numerum quà Numerabilem*; quæ Ratio formalis materiam consideratam segregat ab omnibus disciplinis aliis, addicatque soli Arithmeticæ. Eodem modo Metaphysices subjectum dicitur Ens quà Ens; Physices, Corpus naturale, quà naturale.

2. Hujus subjecti, Numeri, aliqua requeritur præcognitio, quam ita breviter accipe. *Euclides lib. 7. Def. 2.* definit *Numerum, multitudinē ex unitatibus compositam*.

3. *Unitas* verò, per *Lib. 7. Def. 1. Est secundum quam unumquodq; eorum, quæ sunt, unum dicitur*. Itaque Unitas numerus quidem non est, numeri tamen omnis initium & radix.

4. Recentiorum Mathematicorum quidam litem hic moverunt conatique sunt consuadere duplicem absurditatem. I. *Numerum non esse* Quantitatem *discretam, sed* multò magis *continuam*. II. *Unitatem* revera *esse Numerum*.

5. I. *Stevinus lib. 2. Def. 2. Arithmetic.* Gall. ita argumentatur. *Quidquid non est nisi una Quantitas, id non potest esse quantitas discreta. At sexaginta quà sunt numerus, sunt una indivisa quantitas.* Igitur *sexaginta non sunt Quantitas discreta.* Quòd si mente concipias sexaginta esse divisa in totidem unitates, eâdem ratione (inquit Stevinus) fingere possum lineam divisam in partes totidem. Linea igitur non minùs est quantitas discreta quàm Numerus sexagenarius. Addit & illud: *Si numerus est quantitas discreta, quomodo simul possit esse Quantitas conjuncta & composita ex unitatibus?* Siquidem inter se pugnant & adversis frontibus concurrunt: esse conjunctum, & esse discretum. Excellenti huic Mathematico, quia non licuit esse versato in Logicis, aut Meta-physi-

physicis, nihil mirum si nescivit *etiam in rebus discretis* dari ἕνωσιν, *conjunctionem, & ordinationem*, per quam unæ sunt, neque tamen continuæ sed discretæ: de qua controversia pertractatum à nobis est, Comment. & Exercit. in Organ. Aristotel. Cap. de Quant.

6. II. *Alteri Paradoxo* ansam præministravit primam *P. Ramus*. Ramum *Stevinus* dicto loco juvit argumentis, quæ sunt hujusmodi. 1. *Pars* ejusdem naturæ est cum toto: Unitas est pars Collectionis Unitatum, seu multitudinis. Ergo & ejusdem naturæ cum multitudine. At multitudo numerus est. Ergo & Unitas. 2. *Ex* dato numero, si nullus numerus auferatur, remanet numerus idem. Ex datis tribus si abstrahatur unitas, quæ non est numerus, remanebunt tria quantumvis ablatâ unitate. Id verò ἄλογον. Non sunt hæ rationes tam validi roboris, quàm primâ fronte videntur. Nam, quod attinet *ad* 1. Propositio argumenti vera est in iis, quæ sunt ὁμοιογενῆ & similaria: ut aquæ quælibet pars aqua est; auri aurum: falsa in iis

quæ dissimilaria & ἑτερογενῆ. Capitis quælibet portio, non est caput: nec arboris arbor, nec hominis homo. Tale quid & numerus est. Nam ternarius ipsa re differt ab unitate. Specie enim differunt numeri, quam accipiunt ab unitate ultima, quæ sicubi, vel additur vel aufertur, mutatur numeri species. Itaque nec quælibet pars ternarii erit ejusdem naturæ cum ternario. *Ad 2.* Unitatem non numerum, sed partem numeri esse affirmo. Sic igitur retorqueo Ex integro si partem abstuleris non manet integrum. Homo capite aut thorace orbatus, desinit esse homo, quanquam nec caput homo sit nec thorax. Si abs ternario abstuleris unitatem, non manet ternarius. Unitas igitur, licet numerus non sit, ablata tamen à numero eum imminuit: quia numeri non solum initium est aut finis, sed etiam pars: Ipsa interim Numerus non est. Pars vero ablata à Toto, non relinquit Totum. Ergo nec unitas abstracta à tribus, relinquit tria. *Cæterum* unitatem è numero Numerorum expungit hoc argumentum. *Omnis Numerus est*

mul-

multitudo, per Def. 2. l. 7. Euclid. At *unitas multitudo non est*: Illa enim indivisionem hæc divisionem includit. *Unitas ergo non est numerus.*

7. Scio etiam *alia* afferri solere argumenta in rem præsentem, probantia unitatem non esse numerum. Sed quæ mihi videntur non posse sufferre solem subtilioris Philosophiæ. Ex illorum genere hæc sunt. 1. Omnis numerus potest dividi in partes: quia est quantitas: Unitas vero dividi nequit, quia composita non est, sed simplicissima. 2. Qualiter se habet punctum ad magnitudinem, ita unitas ad numerum. At punctum magnitudo non est. Itaque nec unitas est numerus. Primum horum falsitatis damnant omnes eruditi Arithmetici, qui unitatem in partes secernunt dimidias, tertias, quartas. Ex divisione Unitatis velut ex Oceano fluit universa Fractionum subtilitas, quemadmodum demonstratur, à *Diophant. lib. 4.* q. 33. Et lib. *5.* q. 12. 14. 15.

8. Quæ in argumento secundo proponitur *analogia unitatis & puncti*, ea

i semper *subjecta* fuit, quamvis aucto-
gnoscat egregios. Nimis longum la-
que est discrimen inter duo ista, quam
on ferri mereantur. 1. Unitas est pars
tituens componensque numeri. Nam
ibus Monadibus consit ternarius. At
ctum nullam componit magnitudi-
. Ex centenis millibus punctis, ne
em brevissimam conficies lineam. Di-
ile enim ex indivisibilibus non com-
tur. 2. Omnis unitas potest frangi, di-
que in partes minutiores. Nullum
tum dividitur; quippe prorsus ἄτο-
. Unitas incipit finitque omnem nu-
m. At punctum nec inchoat, nec ter-
t omnem magnitudinem, (non e-
superficiem aut corpus) sed solam
m: Imo ne lineam quidem omnem,
enim circulum, aut Ellipsin, aut con-
lem) sed solam rectam finitam. Pul-
nt, quae de Unitate in hanc sententi-
guntur apud *Proclum. Arithm.* Ἀνά-
ϑ πηγὴ ἀριθμῶν· καὶ ἀριθμὸς οὐκ ἔστι
ική ἐστιν ἀριθμῶν· πηγὴ καὶ ῥίζα καὶ
ική πλήθους παντὸς, εἰκόνα σώζουσα

θεῖ8,

θείας, ὁ μηδὲν ὂν τῶν ὄντων (ἐστὶ δ' οὐ) ὅμως τῶν ὄντων ποιητικόν. Ait Numen seu Deum non esse Ens, quia est supra Ens, & potius ὑπερουσίας quàm οὐσίας.

9. Hic tamen non nemo dubius quæret: 1. Quo fundamento *Aristotel. cum puncto unitatem* comparaverit? & quo sensu *nostri Mathematici* profiteantur, sic punctum esse principium magnitudinis, quemadm. Unitas est principium numerorum? Fortè ita *excusari* hi viri possunt, si dixerimus, Punctum principium esse, *non compositionis*, (ut unitas Numeri) nullum enim divisibile componitur ex indivisibilibus, docente Aristot: *sed generationis*, seu ut appositiùs dicam, fluxus. Nam punctum motu vel fluxu suo fingitur generare lineam.

10. Quæret aliquis *secundò*: Quid ergo sit, quod puncto respondere possit in numeris? Credibile enim est, velut in tempore momentum, in magnitudine punctũ, sic in numero dari aliquid, insectilibus istis proportione comparandum? Dicam, quid *Stevinus* excogitârit libello Gallico, de qua

de qua tamen re cuilibet arbitrari liberum erit. Putat is, idem in numeris esse *Cyphram*, quod in magnitudine *punctum*, in tempore τὸ νῦν: 1. Ut punctum lineæ quidem adjungitur, ipsum tamen linea non est; Ita Cyphra numero adjungitur, ipsa verò non est numerus. 2. Ut punctum in partes secari nequit, ita nec Cyphra: 3. Ut infinita puncta nullam conficiunt lineam, ita nec infinitæ Cyphræ numerum: 4. Ut linea A B non extenditur additione puncti C; ita nec Numerus senarius, accrescit adjectione Cyphræ.

A——B 6 C——D. E. 60.

. 0

C

5. Ut linea CD. in E usq; producta, augetur & extenditur adminiculo puncti E; ita numerus 6, si fuerit productus in Cyphram usque, tum augetur per Cyphram, fiuntque 60. (Hæc analogia nauci & nihili est. Vim enim facit Axiomati; Ex indivis. non fit divis.) 6. Idem probat ex Tabulis situum Regionū: in quibus gradus quilibet est arcus obliquus, cujus longitudo $\frac{1}{360}$ peri-

peripheriæ Circuli. Cujuslibet verò gradus initium & finis est punctum Mathematicus. Jam initio gradus, seu puncto primo quid respondet in Tabulis? Non certè unitas, sed Cyphra: nisi illustres Mathematicos, imo ipsam naturam errasse dixeris. Sinus unitatis (gradus unius) est 526265. At sinus Cyphræ est 523360.

11. *Divisiones numerorum*, quibus hæc, quam profitemur, Arithmetices constitutio juvatur, partim ex trivio, partim ex Euclide, partim ex Prædicamentis cognitas, perspectasque supponimus. In illis familiares sunt Partitiones Numeri I. in *Parem* & *Imparem*. *Par* est, qui bifariam dividitur Eucli. l. 7. def. 6. ut, 4. 8. 10. 12. *Impar* (def. 7.) qui unitate differt à pari ut 3. 5. 7. 9. 11. II. In *pariter parem*, & *pariter imparem*. *Pariter par* est (def. 8.) quem par metitur per parem, ut 32. mensurant 8. per 4. *Pariter impar* (def. 9.) quem numerus impar metitur per imparem, ut 15. mensurant 5. per 3. III. Sic porrò Numerus est vel *Primus* vel *Compositus*. *Primus* est (def. 11.) quem unitas sola metitur, ut 2. 3. 5.

Com-

Compositus, quem metitur alius numerus, ut 15. mensurantur à 3 & 5. IV. Apud Logicos familiaris est divisio in *Numerantem seu abstractum à reb.*, qualis binarius, denarius; & *Numeratum seu concretum*, ut tres Charites, Novem Musæ. V. In *digitum*, ut unum, duo, tria, usque ad novem; *Articulum*, ut decem, viginti, triginta. Et *compositum*, ut quindecim, viginti septem. Quæ omnia alii ociosiores præposterâ & coactâ curiositate, non sine pompâ & grandi apparatu in scenam producant. Nos, qui scimus heterogeneis divisionibus, haut multum juvari præsentem rem Arithmeticam, festinamus ad potiora.

CAPUT III.

PROPOSITIO I.

Numerorum Notas & Valorem cognoscere.

1. *Cur charactères cæperint usurpari.*
2. *Numeratio per calculos.*
3. *Per digitorum inflexiones.*
4. *Per literas alphabeti Latinas.*

5. Per

I.

IN exprimendis numeris auctores omni ævo varios adhibuerunt *characteres*; compendii gratiâ, ne perpetuò opus esset integris numerorum scriptionibus totas paginas complere.

2. Prima meditatio apud *Latinos* fieri cœpit *ope Lapillorum*, quos nominabant *Calculos*. Unde etiamnum hodiè elegantes loquendi formulæ, *Calculum ponere: revocare ad Calculum.*

3. Sed

3. Sed & iidem Romani numeros exprimere solebant, singulari & artificioso *digitorum positu & flexura*, ut unusquisque Arithmeticam manu secum circumferret. Prout variis mirisque modis inflectebantur digiti, ita varii significabantur numeri. Hinc Nearchi jocus in vetulam.

Ἡ Φάος ἀθρήσασ' Ἐλάφου πλέον, ἣ χερὶ λαιῇ
Γῆρας ἀριθμεῖσθαι δεύτερον ἤρξατο.

Quæ cervo facta est annosior, atque sinistra
Ætatem cœpit jam numerare suam.

Et Juvenalis. *Atque suos jam dextra computat annos.* Elegans est apud *Plinium* locus Lib. 34. Cap. 7. *Præterea*, inquit *Janus geminus à Numa Rege dicatus, qui pacis bellique argumento colitur, digitis ita figuratis, ut tercentum sexaginta quinque dierum nota, per significationem, anni, temporis, & ævi Deum se indicaret.* Siquis est curiosior antiquitatum indagator, & plenius scire gestit ipsissimam computandi rationem, quæ fiebat digitorum gestibus, is legito libellum *Artabasda* Græci scriptoris, *de metro Dactylico*, & *Beda Presbyt. de Reb. natur. cap.* 1.

4. Po-

4. Postidea, inveterata paululum Cheironomia, cœpit omne numerandi negotium expediri *septem his literis* alphabeti. I. X. V. C. L. M. D. Litera I. denotabat *unum*. X. *decem*. V. *quinque*: Nam ut quinarius est denarii dimidius, ita V, est medietas ipsius X. C. *Centum*, quorum est litera initialis. Cæterum antiquitus non ita pingebatur C dimidio Circulo, uti apud nos, sed tali charactere ⊏ cujus dimidium quia est L, idcirco L significabat quinquaginta, dimidium centenarii. M. *mille*. D quingenta. Nam, ut quingenta sunt dimidium de mille, ita D est dimidia pars M antiquioris. Non enim ita M olim pingebatur ut jam; sed hunc in modum ꟾ. Nonnulli sunt qui ex ꟾ antiquiorum talem faciunt characterem CIↃ, duo scilicet C, cum media linea, quæ etiam significant mille. Quingenta vero ita IↃ. Porro universa series numerorum Romanorum distribui potest in nonnullas *Enneadas*, seu *Novenarias*; quarum *prima* continet unitates usque ad decem: *Secunda* denarios usque ad Centum.

tum. *Tertia* centenarios usque ad mille. *Quarta* millenarios usque ad decem millia. *Quinta* myriades usque ad decies centena millia. Atque ita ulterius.

ENNEADES ROMANORUM.

1. I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX.
2. X. XX. XXX. XL. L. LX. LXX. LXXX. XC.
3. C. CC. CCC. CD. D. DC. DCC. DCCC. CM.
4. M. IIM. IIIM. IVM. VM. VIM. VIIM. IIXM. IXM.
5. XM. XXM. XXXM. XLM. LM. LXM. &c.

5. Veniamus ad Characteres *Graecorum*. Hi assumebant *Alphabeti literas*, & easdem, quâ Romani, lege distribuebant in *Enneades*. In quarum *primâ* unitates; in *secundâ* numeri denarii; in *tertiâ* Centenarii &c. quemadmodum hîc videre est.

EN-

ÆNNEADES GRÆCORUM.

α. β. γ. δ. ε. ς. ζ. η. θ.
ι. κ. λ. μ. ν. ξ. ο. π. ϟ.
ρ. σ. τ. υ. φ. χ. ψ. ω. ϡ.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	ς.	ζ.	η.	θ.
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
ι.	κ.	λ.	μ.	ν.	ξ.	ο.	π.	&c.
X.	XX.	XXX.	XL.	L.	LX.	LXX.	LXXX.	

Singulæ literæ singulis Characteribus Romanorum Enneadum respondent. α I. β II. γ III. &c. ι X. κ XX. λ XXX. μ XL. ν L. &c.

6. Supersunt *vulgares* illi *characteres Barbari*, quibus hodie utitur universus fere orbis. Suntq; universim novem, 1.2.3.4. 5.6.7.8.9. queis additur o cyphra, seu figura nihili, Nulla, Zero Arabibus. Nonnullorum sententia est, primos harum figurarum *inventores* fuisse *Arabes* (alii Phœnices malunt; alii Indos) quæ sanè opinio non est à veritate aliena. Nam sicut Arabes olim totius ferè orbis potiti sunt, ita credibile est, scientiarum quoq; fuisse propagato-

gatores. Quicunque sit Inventor maxima sane illi debetur gratia.

7. Ut horum characterum *pronunciationem* & *valorem* genuinam calleamus; notandum, unam quamq; figuram *per se sumptam*, seu solam seu etiam ad dexteram maximi numeri, seipsam semel significare, seu tantum, quantum in prima impositione significare jussa est: ut 2. duo: 3. tria 4. quatuor. 5. quinque. 6. sex. 7. septem. 8. octo. 9. novem. At *secundo* loco si posita fuerit, toties eam significare decem, *tertio* loco toties centum: *quarto* toties mille quoties alias valet. *Gratia exempli*, hæc figura 9 sola posita valet novem. At si addatur o cyphra, ipsaque occupet secundum locum, 90, Jam notat nonaginta, id est decies novem: si una adhuc cyphra addatur 900, quia novem tum occupant tertium locum, fient nongenta, id est, novies centum, si adhuc addatur cyphra 9000. quia 9 quarto loco veniunt, fient novem millia.

8. Ita in hoc numero 3970. *qui sunt anni à condito mundo ad natum Christum,* 3. sunt

3. sunt quarto loco, ergo significant tria millia. 9 sunt tertio loco; ergo notant nongenta. 7 secundo loco, septuaginta: Cyphra primo loco nihil significat *Sunt ergo anni, ter mille, nongenti, septuaginta.* Qui noverit tres vel quatuor tales characteres exprimere, ille numerum etiam prolixum facilè proferet, si *hanc* observaverit *Methodum.*

9. *A dextris* exorsus, *post tertiam* quamque figuram, *lineolam* ducat, atque ita integrum numerum in certas classes distribuat: tum unius classis numerum ita proferat, ac si nulli essent reliqui. Ad lineolam verò primam dextram versus, dicat *millia*: ad subsequentem penultimam *Millena*: ad reliquas omnes, quotcunque fuerint, dicat *millies*; velut monet antiquus hic versiculus,

Millia post primam dices, millena secundam,
Indè per Es reliquas exprime ritè notas.

EXEMPLA.

10. I. *Bibliander numerat sumptus omnes, quos in exstruendo templo fecerat Salomon, ponitque insumptos esse coronatos*

gatores. Quicunque sit Inventor maxima sane illi debetur gratia.

7. Ut horum characterum *pronunciationem* & *valorem* genuinam calleamus; notandum, unam quamq; figuram *per se sumptam*, seu solam seu etiam ad dexteram maximi numeri, seipsam semel significare, seu tantum, quantum in prima impositione significare jussa est: ut 2. duo: 3. tria 4. quatuor. 5. quinque. 6. sex. 7. septem. 8. octo. 9. novem. At *secundo* loco si posita fuerit, toties eam significare decem, *tertio* loco toties centum: *quarto* toties mille quoties alias valet. *Gratia exempli*, hæc figura 9 sola posita valet novem. At si addatur o cyphra, ipsaque occupet secundum locum, 90, jam notat nonaginta, id est decies novem: si una adhuc cyphra addatur 900, quia novem tum occupant tertium locum, fient nongenta, id est, novies centum, si adhuc addatur cyphra 9000. quia 9 quarto loco veniunt, fient novem millia.

8. Ita in hoc numero 3970. *qui sunt anni à condito mundo ad natum Christum*, 3. sunt

3. sunt quarto loco, ergo significant tria millia. 9 sunt tertio loco; ergo notant nongenta. 7 secundo loco, septuaginta: Cyphra primo loco nihil significat *Sunt ergo anni, ter mille, nongenti, septuaginta.* Qui novit tres vel quatuor tales characteres exprimere, ille numerum etiam prolixum facilè proferet, si *hanc* observaverit *Methodum.*

9. *A dextris* exorsus, *post tertiam* quamque figuram, *lineolam* ducat, atque ita integrum numerum in certas classes distribuat: tum unius classis numerum ita proferat, ac si nulli essent reliqui. Ad lineolam verò primam dextram versus, dicat *millia*: ad subsequentem penultimam *Millena*: ad reliquas omnes, quotcunque fuerint, dicat *millies*; velut monet antiquus hic versiculus,

Millia post primam dices, millena secundam,
Inde per Es reliquas exprime ritè notas.

EXEMPLA.

10. I. *Bibliander numerat sumptus omnes, quos in exstruendo templo fecerat Salomon, ponitque insumptos esse coronatos*

M M M;
23, 695, 380, 050. *Hic numerus ita, uti factum vides, distinguendus est, facto à dextra initio; Et proferendus hac ratione; Decies ter millies, millena millia: Sexcenties nonagies quinquies millena millia. Trecenta octuaginta millia & quinquaginta.*

11. II. *Imperator Augustus in tutandis terminis Imperij Rom. quotannis coronatos im-*
M M
pendere coactus est 1, 200, 000, *id est, millenos mille & ducentos mille.*

12. III. *Sardanapalus Rex Aßyria, ingentem thesaurum secum in turrim deportavit, seque cum eo combussit. Thesaurus hic fuisse*
M M M
dicitur. 145, 000, 000, 000, *id est, centies quadragies quinquies millies, millena millia aureorum.*

13. IV. *Archimedes lib. de numero Arena demonstrat, non tantum numerari posse arenulas omnes, qua in tota tellure reperiuntur; verum etiam quamvis tota tellus, & aër, & cœlum, & universus mundus foret expletus granulis arenularum, usque ad extimam cœli*

supre-

supremi superficiem, tamen numerum dari posse multo majorem, quàm omnes hæ sunt arenulæ. Talem numerum ex Archimedis fundamentis Clavius deduxit, & hic est,

MES M M M M M M M M M

1, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000,

M M M M M MA MIA

000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000,

unitas scilicet cum quinquaginta una cyphris, id est: Millies, millies, millies, millies, millies, millies, millies, millies, millies, millies, millies, millies, m, m, m, millena millia,

V. *In hoc exemplo omnes sunt varietates,*

MES M M M MA MIA

12, 345, 678, 900, 987, 654, 321.

14 Hic nolim nescios esse elegantioris literaturæ amatores, peculiarem rationem numerorum proferendorum Latinis quibusdam scriptoribus, peculiarem etiam Græcis & Gallis esse usitatam. Primùm Latini nonnulli, quando adverbiis numerabilibus exprimunt rem Numariā, semper intelligi volunt centū millia, per Ellipsin omissa. *Cicero in Divinat. Quo nomine abs te H-S. millies ex lege repeto?* sub in-

 telli-

tellige *centũ millia, quæ ita scribuntur*, 100, 000,000. *id est, centies millena millia sestertia, vel quod idem, millies centum millia sestertium*. Sueton. in Calig. *Totum illud Tiberii Cæsaris, vicies ac septies millies H-S. non toto vertente anno absumpsit*, subintellige centum millia; scriptio talis est. 2, 700, 000, 000, id est, *bis millies millena millia; septingenta millena millia; seu quod idem; vicies septies millies centum millia*. Qui in his promptus & expeditus volet esse, is, si quis offertur numerus, *initio* scribat *cyphras quinque*, quæ sint instar centum millium, per quæ auctores isti semper computant. Iis præscribat oblatum numerum, quod ipsum ex hac distinctione liquet; 1000, 00000. *Millies centum millia H-S.*

15. Velut Latini per centena millia, sic Græci per myriades, id est decem millia, fere computant, & uno verbo magnum efferunt numerum. Hoc casu si quis obferatur numerus characteribus exprimendus, scribantur *cyphra quatuor*, quæ idem sunt cum myriade, & iis præfigatur datus numerus.

16. H-

16. *Ut, quingentæ, viginti novem Myriades (qualem ferè exercitum Xerxes in Græciam adduxit) sic scribuntur 5290000, id est, quinquies millena millia, ducenta nonaginta millia.*

17. Plutarchus de Antonio *scribit, quòd is amicorum cuidam jusserit dari, myriadas quinque & viginti, 250000, id est, ducenta quinquaginta millia drachmarum.* Apud eundem est *in Cicerone; Octavium Cæsarem ab Antonio repetivisse, bis mille & quingentas myriadas drachmarum, 25000000, id est, vicies quinquies millena millia.*

18. Aliam adhuc & peculiarem myriadum rationem Galli usurpant, quam ipsi vocant un Million, continetque non decem millia, ut apud Græcos, sed decies centena millia: *Ut duæ Milliones coronatorum faciunt 2,000,000.*

CAPUT IV.

1. *Principia sunt duûm generum.*
2. *Principia Arithmetica.*
3. *Quæ sint postulata.*
4. *Quæ Axiomata.*

5. *Quæ definitiones.*

I.

EXpedivimus subjectum, quantum ad nostrum attinet propositum. *Secundo loco* ambulant *Principia*; quæ duûm sunt generum, *Essentiæ* & *cognitionis*.

2. *Illa* in Physicis maximè reperiuntur. *Hæc* in scientiis Mathematicis, nostraque Arithmeticâ. Principia cognitionis non sunt unius generis. Sunt enim *postulata*, *Axiomata*, *Definitiones*, quorum omnium in Arithmetica usus est.

3. *Postulata*, quas & *Petitiones* vocant, sunt ubi quid expediri volueris aut effici; ubi imprimis postulatur auditoris consensus, ne demonstrationi mora injiciatur. *Ut* si jubeatur numerus numero subscribi, postulatum est.

4. *Axiomata* sunt communis quædam pronunciata, & notiones, & Regulæ tam manifestæ, ut apud quemvis etiam indoctum assensionem inveniant, quippe ab ipsis sensibus & communi hominum notitia, petitæ. *Tale* est illud. *Totum est majus suâ parte.*

5. Defi-

5. *Definitiones* deniq; sunt terminorum aut vocum explicationes. *Per hæc* velut media demonstrantur *affectiones* polydædalæ *de subjecto*, *Numero*. Hujusmodi Principiorum apud Euclidem non exiguæ extat copia, è quibus nos seligemus, quæ majori erunt usui. Sunt autem talia.

POSTULATA.

1. Postuletur, ut cuivis numero, quivis numerus subscribatur.

2. Cuivis numero addi vel demi posse numerum alium.

3. Quolibet numero sumi posse majorem, minorem, aut multiplicem. l.7.p.2.

4. Cuilibet numero quemlibet sumi posse æqualem. l.7.p.1.

AXIOMATA.

1. *Totum est majus suâ parte*, l.1.a.9.

2. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.*

3. *Quæ eidem æqualia sunt, etiam inter se sunt æqualia*, l.1.a.1.

4. *Quod uno æqualium majus est aut minus, majus quoque aut minus est altero æqualium.* Ibid.

5. *Si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.* l. 1. a. 2.

6. *Si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia* l. 1. a. 3.

7. *Si æqualia per æqualia multiplicentur, quæ proveniunt sunt æqualia.*

8. *Quæ æqualia sunt, eorum medietates, partes tertiæ, quartæ &c. sunt æquales.*

9. *Quæ æqualia sunt, eorum quadrata sunt æqualia.*

10. *Si quadrata vel Cubi sunt inter se æquales, eorum quoque Radices sunt æquales.*

11. *Quæ ejusdem sunt duplicia vel dimidia, inter se sunt æqualia* l. 1. a. 6. 7.

12. *Unitas omnem numerum per unitates metitur, & vice versâ* l. 7. a. 5.

13. *Omnis numerus seipsum metitur per unitates,* l. 7. a. 6.

14. *Unitas nec multiplicat nec dividit.*

DEFINITIONES.

1. *Numerus ad numerum addi dicitur, cùm ex pluribus fit unus: vel cùm plures adduntur in unam summam.*

2. *Numerus à numero subtrahi dicitur, cùm minor aufertur à majori.*

3. Nu-

3. *Numerus numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.* l.7.d.15.

4. *Numerus numerum dividere dicitur, cùm numerus acceptus fuerit, qui suis unitatibus indicat quoties dividens numerus in diviso continetur.*

5. *Cùm duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur: Qui verò numeri sese mutuò multiplicaverint, latera illius dicuntur* l.7.d.15.

6. *Quadratus numerus est, qui sub duobus numeris æqualibus continetur.* l.7.d.18.

7. *Cùm tres numeri mutuò sese multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus fuerit, solidus appellabitur,* l.7. d.16.

8. *Cubus est, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.* l.7.d.19.

9. *Pars est numerus numeri, minor majoris, cùm minor metitur majorem.* l.7. d.3.

CAPUT V.

Affectiones numerorum, quarum prima Additio.

NUnc porro de Numero, per posita hæc principia demonstrare aggredimur *affectiones*; quæ tertiam constituunt scientiarum compagem, & sunt velut tectum fundamento & parietibus innitens. Inter illas *in prima acie* locamus *Additionem*.

PROPOS. II.

Numeros quosque integros in unam summam colligere.

1. *Regula disponendorum & addendorum Numerorum.*
2. *Ætas Mathusalem.*
3. *Quando vixerit Homerus & Roma condita.*
4. *Quando diruta Troja, & quot homines eo bello perierint.*
5. *Progressio est compendium additionis.*
6. *Proba additionis per abjectionem novenarii rejicitur.*
7. *Vera ratio probandi additionem.*

I.

QUid sit Additio constat *ex Def.* 1. Disponantur numeri propositi ordine, per *Post.* 1. Ita ut *Monadici* monadicis respon-

ſpondeant, *denarii* denariis, *Cente* centenariis; ſeu ut apertiùs dicam; per à dextra tuâ incipiendo ſuppona ſibi invicem numeri addendi. Tum d ſubtùs virgula, characteres omnes u ſerieiad dextram, colligantur in un ſummam *per poſt* 2. Hæc ſumma vel charactere ſcribitur vel duobus; ſi u unus is ſubſcribatur præcisè ſeriei: ſi d bus, tum is character, qui eſt ad dextr ſubſcribatur ſeriei; qui ad ſiniſtram, mente ſervetur, vel ſeorſim notetur abaco. Eadem ratione *per Poſt*: 2. C gatur ſumma ſeriei ſequentis; atque ante omnia addatur character reſerva Hæc ſumma item, ſi unâ figura conſ ſcribatur. Sin duabus, ſcribatur dextr ſervetur ſiniſtra ut prius: quæ poſtea ſu mæ ſequentis ſeriei itidem erit adden Hæc praxis *toties iteranda*, quoad perv tum fuerit ad finem. Tum nihil me reſervandum vel ſeorſim notandum, omnia expreſsè ſcribenda. Atque ita diti ſunt inter ſe numeri *per Def.* 1. q erat propoſitum.

EXEMPLA.

2. I. *Discupio scire, quot annos vixerit Mathusalem? Testantur sacra biblia, Mathusalem cum gigneret Lamechum, fuisse annorum 187. Post genitum Lamech, vixisse annos 782. Colligantur hi numeri in unam summam, & habebitur ætas Mathusalem; idque*

7 8 2
1 8 7

9 6 9

hoc pacto. Septem & 2. sunt 9 scribenda sub lineola: quia character unus est. Octo & 8, sunt 16. Hic scribo figuram dextram 6, & mente retineo 1. Ulterius unum & 7 sunt 8 Et 1. illud servatum sunt 9 quæ scribo. Vixit ergo Mathusalem annos 969.

3. II. *Quæritur quot anni sint, cùm vixit Poëta Homerus? A. Gellius refert, vixisse illum ante Romam conditam annis 160. Jam Roma condita fuit ante natum CHRISTUM, annis 752. & à nato CHRISTO usq; ad hæc tempora sunt anni 1622. Si igitur addiderimus hos annos, videbimus ante quot annos vixerit Homerus.*

Duo

```
  5 6 0
  7 5 2
1 6 2 2
-------
2 5 3 4
```

Duo & duo ſunt 4. cyphra negligitur. Duo & 5 & 6 ſunt 13. ſcribantur 3. ſervetur 1. Sex & 7 & 1 ſunt 14. & unum illud ſervatum ſunt 15. ſcribantur 5. ſervetur 1. Unum & 1. ſervatum ſunt 2. Vixit ergo Homerus ante annos 2534.

4. *III. Troja diruta fuit ante natum Chriſtum 1193. Animus eſt ſcire quotnam homines interierint in bello Trojano? Hiſtoriarum fides teſtatur interiiſſe Græcos 880000. Trojanos verò 686000. Hi collecti in unam ſummam faciunt 1566000.*

```
  8 8 0 0 0 0
  6 8 6 0 0 0
-------------
1 5 6 6 0 0 0
```

IV. Quatuor homines ære mihi devincti ſunt: quorum primus debet florenos 6952. Secundus 8346. Tertius 6259. Quartus 5490 Lubet colligere numeros hos in unam ſummam.

6 9 5 2
8 3 4 6
6 2 5 9
5 4 9 6

2 7 0 4 7

Novem, 6, & 2 sunt septendecim. Scribo 7 servato 1. Unum servatum & 9 sunt 10, & 5 sunt 15, & 4 sunt, 19 & 5 sunt 24. Hic scribo 4 reservo 2. Pergo Quatuor & 2 serv: sunt 6 & 2 sunt 8, & 3 sunt 11. & 9 sunt 20. Scribo 0, servo 2. Postremo 5, & 2 servata sunt 7, & 6 sunt 13, & 8 sunt 21: & 6 sunt 27, quæ jam integrè scribo, siquidem nihil amplius superest. Hinc tota summa 27047.

COROLL. I.

5. Solent interdum adferri Exempla Additionum in numeris non magnis, æquabili se seriè invicem excedentibus, in quibus eleganti uti licet compendio. Hujusmodi numerorum sibi succedentium ordinem, Arithmetici vocant *Progressionem*. Sed quia ad has operationes opus est multiplicatione & Divisione, itaque suspendemus rem quoad istæ demonstratæ fuerint; Vide *Prop*. 6. libri hujus.

Co-

COROLL. II.

6. *Probationem additionis* (ut certus sis rectenè an sequiùs fueris operatus) instituere ut plurimum solent Arithmetici, facto examine *per abjectionem novenarii*, ab utroq; numero, tam addendo, quàm addito. Sed *eam falsam admodum & erroris plenam* ego judico, & nisi brevitatem postularet compendii ratio, evidenter & liquidò demonstrarem. Esto enim, qui hos duos numeros 2079 & 4358 colligat in summã hujusmodi, 6545. Nego ego rectè factã additionem. Aliter affirmat. Itur ad abjectionem novenarii, velut ad Regulam Lesbiam & κριτήριον infallibile. Eo judice, veritas protenus causa cadit. Nam si hinc & hinc expunganturr 9, remanent utrobivis 2, quod adversarius ait argumentũ esse integræ & minùs erroneæ operationis. Nihilominus commissus est crassissimus error.

7. Non existimem commodiùs additionem & probari & demonstrari, quàm *per subtractionem*; quum qui additus est numerus, à producto aufertur iterum, relinquitque alterutrum additorum, qua de re *Prop. seq.* PROP.

PROP. III.

Numerum quemlibet minorem à majore subtrahere.

1. *Dispositio & Subtractio numerorum.*
2. *Historia de Lucio.*
3. *Probatio Subtractionis & Addit.*

I.

ADornatis, ut in additione, numeris (scilicet ad dextram invicem subscriptis) minor semper inferiori loco ponatur, *per post*: 1. Tumq; à dextris initio facto, inferior superiori subtrahatur *per post*: 2. quod relinquitur scribendū sub virgula. Si usu veniat ut inferior character major sit superiore, atque ita intercludatur fieri subtractio, (quis enim octo auferret, ubi solùm tria sunt?) tum minori illi superiori numero addantur 10 mēte, seu cogitatione, sicq; fiat subtractio. Hoc verò quoties fit, toties sequenti ad sinistram numero inferiori addenda est unitas. Tum porro ut cœptum erat, continuanda & absolvenda subtractio, scriptis perpetuô numeris sub lineola, qui post subtractionem remanserint:

rint : subtractiq; erunt numeri *per def. 2.* quod erat Propositum.

EXEMPLA.

I. Est Heros aliquis, qui annuos reditus habet aureorum 6850. Is quotannis insumit & expendit aureos 4350. Quæritur quantum possit reservare singulis annis? Subtrabo numerum minorem à majori. Quod relinquitur est illud, quod Heroi annuatim superfit. Sic igitur ago.

6 8 5 0
4 3 5 0
———
2 5 0 0

Nibil de nibilo manet 0. Quinque de 5, manet 0. Tria de 8, manent 5. Quatuor de 6 manent 2. Invenio 2500 aureos.

II. Debet mibi vir aliquis aureos 8325. Persolvit verò jam 2978. Cupio scire quantū mibi adhuc sit in residuo. Sic ago: Subtrabens minorē numerū à majori, à dextris exordiens.

8 3 2 5
2 9 7 8
———
5 3 4 7

Octo de 5 non possum. Adscribo sequenti-bus 7, unitatem; & dico: Octo de 5 & 10. (quæ 10 com-

to commodatò famo è vicinia) id est 15: supermanent 7. Ulterius 7, & asscriptum 1, id est 8 de 2 non possum: Igitur asscripta unitate ipsis 7 sequentibus, ajo 8 de 2 & 10, seu de 12 remanent 4: Porro 9 & asscriptum 1, seu 10, de 3 non possum: 10 de 13 (asscripta unitate ad sequentia 2) manent 3. Denique 2 & 1. seu 3 de 8, supersunt 5. Debentur ergo mihi adhuc 5347 aurei.

III. Dux militum in bellum secum adduxit tot hominum capita 587 340. Uno prælio trucidati fuerunt 2500: alio prælio 6480. Quæritur quot milites adhuc habeat superstites? Hic addendi sunt primùm.

6 4 8 0
2 5 0 0
8 9 8 0

milites trucidati in unam summam, & proveniunt 8980. Hi porrò auferendi à tota summa militum, & remanent mi-

5 8 7 3 4 0
8 9 8 0
5 7 8 3 6 0

lites superstites 578360.

IV. Conradus Zeltner ofert anno 1497

illo

in Lacu quodam Heilbrunnensi inventum est lucium, monili aureo circumdatum, cui inscripta fuerint hæc verba, Primus ego piscis, quem Fridr. II. suis manibus huic lacui imposuit Anno 1230, die 8. Octobr. Quæritur quot fuerit annorum lucius hic? Auferatur inferior de superiori, seu minor de majori, remanebunt Anni 267, quos vixerat Lucius.

1 4 9 7
1 2 3 0
2 6 7

COROLLAR.

3. *Probationem Subtractionis* & Additionis quod spectat, quamvis varii sint modi, quibus eam expediunt Arithmetici; vix tamē aliquis est tutior illo, qui per easdem ipsas instituitur. Ita additio probatur per Subtractionem. *Subtractio per Additionem.* Unum *exemplum* sufficerit, & aperiet rem. *Numeri A & B addantur: provenit Nu-*

A 6 8 4
B 3 5 6
C 1 0 4 0

merus

merus C. Ab hoc numero C si B rursus auferatur, provenit iterum numerus A, si operatio rectè est instituta. Rursus sic.

C 1 0 4 0
A 6 8 4

B 3 5 6

Numerus A, auferatur à C, provenit iterū B. Ita probari poterunt omnia exempla, tū hâc tū præcedenti *Prop.* adducta. Ratio est evidens. *Per Axiom 2.* Totū est æquale omnibus suis partibus simul sumptis. C. est totum. A&B sunt partes. Hæ ergo æquivalēt Toti: Proinde si ex earum additione provenit totum C, operatio benè est instituta. Item si ex alterutrius earum subtractione provenit alter, etiam tum benè habet.

PROPOSITIO IV.

Numerum unum per alium multiplicare.

1. *Multiplicatio quid sit.*
2. *Abacus Pythagoricus & ejus usus.*
3. *Præcepta multiplicationis.*
4. *Quot horæ in anno.*

5. Am-

5. *Ambitus terræ.*
6. *Quod milliaria currant stellæ?*
7. *Quis sit numerus Quadratus, cubicus.*
8. *Mensuratio agri.*
9. *Mensuratio Cistæ.*
10. *Compendia tria Multiplicationis.*
11. *Thesaurus Antiocho oblatus.*
12. *Tonna auri quantum valeat.*
13. *Proba multiplicationis.*

I. *Multiplicatio* (ut constat *ex Def. 3.*) nihil aliud est, quàm *exaggeratio, seu auctio numerorum, seu* inventio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quã alter multiplicantium ad unitatem Numerus ille qui debet augeri seu exaggerari, dicitur *Multiplicandus*. Alter verò *Multiplicans*. Multiplicat enim priorem illum toties, quot ipse unitates continet. *Multiplicans & Multiplicandus* dicuntur *Latera, per Def. 5. Productum* verò dicitur *Num: Planus*.

2. Multiplicationi numerorum inservit *Abacus Pythagoricus*, sine cujꝰ adminiculo vix poterit feliciter multiplicationis negotium absolvi. Ejus *exemplum* hic habes.

ABA-

ABACUS PYTHAGORÆ

Columna sinistra

1	2							
2	4	3						
3	6	9	4					
4	8	12	16	5				
5	10	15	20	25	6			
6	12	18	24	30	36	7		
7	14	21	28	35	42	49	8	
8	16	24	32	40	48	56	64	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Columna dextra

Ut multiplicationem ipsam videamus, si simplices duo numeri multiplicandi sũt invicem, tabulam hanc ingredere, & minorem in dextra, majorem in sinistra quære. Communis concursus dabit tibi quæsitum. Ut: *Quæritur quot faciant sexies octo? quæro 6 in latere dextro: Et 8 in latere sinistro Communis angulus dat 48. Huc pertinet antiquus versiculus.*

Lævâ majorem, sed dextra quære minorem
Cellula communis quod petis ecce dabit.

Hic

Hic canon firmiter infigendus est memoriæ. Nam ad librum recurrere perpetuo, quemadmodum turpe est, ita etiam molestum, & non carens errore: Ne dicam, quod semper libri ad manum non sint ad rem.

3. In multiplicatione, *Numeri* eâdem ratione sunt *disponendi*, quâ in Additione & subtractione, *per Post.* 1. Nimirum numerus major seu multiplicādus, perpetuo superior esto. Minor seu multiplicans inferior. Et inferioris nota prima dextra, supponatur notæ primæ dextræ superioris. Hoc semper debet observari in Addit: Subtract: & Multipl: His adornatis, dextram seu primam figuram multiplicantis, duc & multiplica, in primam, secundam, tertiā, &c. superioris, per Post. 3. Et ita ordine in omnes quotquot fuerint. Numeri qui proveniunt ordine subscribantur virgulæ, hâc cautione, ut si duabus figuris exprimātur, accipiatur & subscribatur dextra: sinistra mente reservetur, quæ continuo sequenti summæ erit addenda, quemadm: in Add.

&

& subtract: factum. Cùm ita prima nota multiplicantis ducta fuerit in omnes characteres ordine, deleatur illa virgulâ quâdam, tanquam defuncta suo officio: & secunda nota multiplicantis seu inferioris eâdem rursus lege ducatur, in primam, secundam, tertiam, & cæteras superioris numeri. Qui producitur numerus scribi incipit sub secunda nota multiplicantis. Ad eundem modum age cum tertia figura, & cæteris, si quæ supersunt. Postremò lineolâ quadam ducta, numeros omnes intra duas virgulas, qui ex multiplicatione producti sunt, in unam summam collige, *per propos.* 2. hujus. Et absoluta erit Multiplicatio.

EXEMPLA.

4. I. Quæritur quotnam sint horæ in anno? Annus constat diebus 365. & horis 6. Unus verò dies habet horas 24. Si igitur sumantur trecenties sexagies quinquies viginti quatuor, habebuntur horæ anni. Multiplica 365 per 24. numeris hunc in modum dispo-

dispositis. Quater 5 sunt 20. Cyphram subscribo lineolæ, & 2 retineo. Quater 6 sunt 24. & 2 servata sunt 26. subscribo 6, & 2

365	*dies anni*
24	*hora diei*
1460	
730	
8760	
6	*Hora residua.*
8766	

retineo. Quater 3. seu Ter 4. sunt 12. & 2. servata faciunt 14. quæ jam integrè scribo; siquidem perveni ad finem. Deletis jam 4. sequentia 2 duco similiter in tres figuras superiores. Bis 5 sunt 10. Cyphram scribo sub multiplicante, scilicet sub duobus, & 1 servo. Bis 6 sunt 12 & 1 servatum 13. scribo 3 iterū servo 1. Denique bis 3 sunt 6, & unum srrvatū 7. Ducatur linea. Colligantur jam intra lineas numeri contenti in unam summam, proveniunt 8760. quibus si addideris 6 horas, quæ adjecta erant diebus anni, habebis totius anni horas 8766.

§. II. *Quæritur quot milliaria contineat totius Terræ ambitus? Terræ maximus circulus dividitur in 360 gradus. Uni gradui respondent 15. Milliar.: Germ: Multiplica duos*

hos numeros. Habebis milliaria totius circumferentia terrestris 5400, si æstimetur secundū simplicem lineā: non verò per ambages:

360
15
1800
360
5400

Operatio ita habet Quinquies nihil est o, scribatur o sub 5 Quinquies 6 sunt 30. Scribatur o, serventur 3. Ter quinque sunt 15 & 3 servata sunt 18, quæ tota scribantur. Expungantur 5: atq; eatur ad 1. semel o est o. Scribatur o sub 1. semel 6 sunt 6, semel 3 sunt 3. Ducatur virgula. Fiat additio numerorum inter virgulas. Proveniunt 5400 Mill: Germ. Hic Milliarium numerus, quot faciat passus, quot pedes, palmos, digitos, grana, docebimus lib. 3. prop. 3.

6. III. Clavius Comm. in Sacrob. Scribit unamquamque stellā firmamenti in Æquatore, singulis horis velocissima & admiranda pernicitate currere Mill. Germ. 42398437 ½ Cupimus scire quot milliaria Germanica talis stella perambulet integro die Naturali, id est

24 *ho-*

24 horis? Multiplicetur numerus iste per 24, seposita aliquantulum fractione.

42398437
24

169593748
84796874

Proveniunt 1017562488 *quib. si pro fractione annexa adjeceris* 12, *habebis* 1017562500 *Tot scilicet milliaria Germanica currendo absolvit quotidiè Stella firmamenti, in medio cœlo posita.*

COROLLAR. I.

7. Hîc notari velim, Mathematicos sæpissimè facere mentionem *numeri Quadrati & Cubici*, seu multiplicationis Quadratæ & Cubicæ. Quicunque numerus in se seu per seipsum multiplicatur, dicitur *Radix*. Qui verò ex hac Multiplicatione resultat, dicitur *Quadratum per def.* 6. Si Radix in Quadratũ iterum multiplicetur, producitur *Cubus, per def.* 8. seu numerus Cubicus. Si eadem Radix ducatur in Cubum, nascitur *Quadratum de Quadrato*. Si eadem ducatur in Quad. de Quadrato na-

ſcitur *Surſolidum*: atque ita ulterius. *Ut binarius vel 2, ſit radix: Quadratum erit 4. (nam bis 2 ſunt 4.) Cubus 8. nam bis 4. ſunt 8. Quadratum de Quadrato 16. nam bis 8 ſunt 16. Surſolidum 32: nam bis 16 ſunt 32.* Noſtræ hujus Arithmetices limites, vix extendunt ſe ultra Quadratum & Cubum. De his ſunto exempla.

EXEMPLA.

8. I. Sit ager aliquis quadratus, vel ſylva cadua, cujus quæritur Area vel capacitas. Latera ſylvæ ſunt æqualia, unumquodque 64. quadrate vel in ſe, vel per 64. proveniunt 4096 Tota agri aut ſylvæ area.

```
  64
  64
 ----
 256
384
 ----
4096
```

Hic 64 ſunt Latus. 4096 quadratum vel numerus planus, per Def. 5.

9. II. Eſto ciſta quadrata, cujus longitudo latitudini & altitudini æqualis 64 pedum. Erit una ejus quadrata ſuperficies 4096 pedum

(*eam*

(eam dant 64 multip: quadratè) Quos si porrò multiplices Cubicè, id est per 64, provenit tota soliditas cista, vel cubus, vel numerus solidus, per def. 7. scilicet 262144.

```
  4096
    64
 -----
 16384
24576
 -----
262144
```

Plura de hoc argumento invenies Propos. 7. lib. hujus, Et Prop. 1. Lib. 4.

COROLLAR. II.

10. In Multiplicatione *Compendiis* quibusdam uti solemus, quæ ordine apponam.

I. Si *per unitatem* multiplicandus est Numerus, non est opus ullâ operatione. Unitas enim nec multiplicat nec dividit *per axi.* 14. *Exemplum. Si sylva illa, cujus jam fecimus mentionem, debeat vendi: Et unaquæque pertica æstimetur Marcâ Lubecensi: Sunt vero perticæ 4096 multiplicandæ per 1: Heîc retineo easdem perticas, nec multiplicatione est opus. Proin tota sylva quot*

quot perticis constat, totidem etiam constabit Marc. Lubecensib.

II. Quicunque numerus multiplicandus est *per* 10, huic à dextris adjiciatur una cyphra; & absoluta est operatio. Si *per* 100, apponantur 00: si *per mille*, 000.

Exemplum. *Dux habeat exercitum dispositum in aciem quadratam oblongam: In latere longiore aciei stant milites 25, In breviore* 10. *Quot universim sunt millites? Multiplica 25 per 10, id est, appone ipsis 25 Cyphram ad dextram, habebis 250 milites, quibus constat tota acies. Item si in aciei quadrata uno latere sint milites* 264, *in altero* 100 *multiplica* 264 *per* 100, *id est, appone illis duas cyphras, habebis milites* 26400.

III. Sint Numeri duo multiplicandi; *Uterq; ad dextram* habeat *aliquot cyphras*: Heic cyphras omnes *connumera*, atque ordine scribe sub lineam. Pòst characteres significantes multiplica vulgari more: quod provenit præscribe Cyphris, & facta est multiplicatio. Exemplum.

11. *Josephus lib.* 13. *c.* 15. *scribit Antiochum olim obsidione cinxisse Hierosolymas. Cum copa-*

eo pactum iniisse sacerdotem Hircanum, atque illi dono obtulisse ex thesauro, quem Rex David moriens secum in sepulchrũ deportari jusserat, 3000 talenta. Caeterum scribunt auctores talentum unum (quod nos dicimus ein Centner Silber) pendere 600 coronatos. Multiplicantur 3000 per 600: scilicet quinque cyphrae ordine ponantur, & sex ducantur in tria, ex

3000
600

proveniunt 1800000 Coronati. Si scire porrò cupis hac summa quot faciat Marcas Lubecenses, quia unus coronatus aequivalet tribus Marcis, multiplica hunc numerum per 3, id est, scribe ordine quinque cyphras; atque illis praepone ter octodecim, quae faciunt 54.

1800000
3

invenies 5. 400, 000 Marcas, id est, vier und fünffzigmal hundert tausent ℔) quas Antonius dono accepit.

12. Vel etiam octodecim Tonnas auri, si pro quaque tonna numeres centum mille Coronatos, vel tercentum mille marcas.

COROLLAR. II.

13. Multiplicatio non *probatur* aut demonstratur melius quam *per Divisionem*. Si nempe Productum, quod per *def.* 5. Planum appellatur, divisum fuerit per latus multiplicans, vel numerum multiplicantem; Ita proveniet latus alterum, id est, multiplicandus, qua de re vide Prop. *seq*.

PROPOS. V.

Numerum unum per alium Dividere.

1. *Quid sit divisio.*
2. *Modus disponendi numeros in divisione.*
3. *Processus divisionis.*
4. *Praecepta & regula divisionis.*
5. *Quis sit Annus bissextilis, & quomodo inveniatur.*
6. *Ratio convertendi asses in aureos.*
7. *Duplos asses in Marcas.*
8. *Qui sit Aureus numerus, & quomodo investigetur.*
9. *Compendia Divisionis.*
10. *Probatio Divisionis & Multiplic.*

I. Quam-

I.

QUanquam *Dion & Euclides*, insignes Mathematici, divisionem sæpiùs usurparint, nunquam tamē illius definitionem ex professo tradiderunt. Habet vero divisio talem affinitatem cum subtractione, qualem multiplicatio cum additione. Enimvero, quemadmodum numerus multiplicari dicitur, cum toties exaggeratur, quot sunt unitates in multiplicante; Ita numerus dividi dicitur, cum divisor toties ab illo subtrahitur, quoties unquam potest, *per Def. 4.*

2. Duo igitur hic sunt numeri: Unus *Dividendus*, alter *Divisor*. *Dividendus* semper major est, & superiori loco ponitur. *Divisor* semper minor & inferius ponendus. Ea tamen Divisoris collocatio aliter se habet quam in propositionibus præcedentibus. In illis enim ad dextram seu primo loco: At hic *ad sinistram* seu ultimo loco scribendus est sub dividendo. Et figura quidem ultima Divisoris, sub ultima dividendi: Cæteræ ordine suo consequenter, si plures fuerint: Nisi forte ul-

 tima

tima Divisoris magnitudine superaverit ultimam dividendi. Tum non ultimo, sed penultimo loco erit collocanda. Ut in exemplis demonstrabimus.

3. Numeris ita dispositis seorsim depingatur *semicirculus*, seu figura Lunularis :. Tum mente inquiratur quoties divisoris ultima figura contineatur, in ultima dividendi? Aut si divisor unico constat charactere, quoties hic contineatur, in suprascripto? Hic numerus inventus, qui *Quotiens* dicitur, scribi debet *post semicirculũ*. Deinde Quotiens hic inventus multiplicandus est in integrũ divisorem, quotcunq; etiã ille constet characteribus. Hoc productum per multiplicationem inventum, & superiori numero præcisè subscriptum, ac eodẽ protenus subtrahitur. Quod relinquitur, supra numeros quoslibet debet scribi. Atq; ita peracta est divisio. Post si plures fuerint characteres Dividendi, *divisor* erit *promovendus* versus sequentes, & figuris superioribus subscribendus, versus dextram succedentibus. Tum eã quâ ante, *methodo repetitâ* quærendum Quoties

ties divisor contineatur in dividēdo: Tum multiplicandum, tum subtrahendum: Idq; toties necessum est repeti, quousque ad finem fuerit perventum.

Quod si jam benè naturam divisionis perpendamus, invenimus *quatuor* in eâ observanda. 1. Quærendum seu considerandum *quoties divisor* contineatur in dividendo. 2. Quotientem inventum *multiplicandum* per integrum Divisorem. 3. Productum per multiplicationem inventum, *subtrahendum* superiori numero dividendo. 4. Divisorem ad proximè sequentem figuram *promovendum*, & de novo instituendam operationem: Quæ omnia antiquo hoc versiculo continentur,

Dic quoties, Multiplica: & Aufer; Promove tandem

vel si vis compendiosius, quatuor his literis, Q.M.S.P.

4. Cæterùm multa eveniunt in Divisione, quæ illam facere solent difficiliorem; si tamen *sequentes* observentur *Regulæ*, (quarum singularũ exempla dabimus) non est quod à difficultate sibi quisquam metuat.

1. Si ultimæ divisionis figuræ majores fuerint ultimis dividendi, non subscribantur characteri ultimo, sed penultimo.

2. Videndum ne quoties assumatur justo major. Alioquin non poterit fieri subtractio. Hæc Regula locum habet in illis exemplis, in quibus Divisor pluribus characteribus constat. Nam quamvis ultima figura divisoris aliquoties contineatur in ultima Dividendi; non tamen toties sumendus erit Quotiens, sed aliquando minor; idque propter figuras sequentes divisoris.

3. Cum divisor in Dividendo non continetur, tum in Quotiente est scribenda Cyphra, & promovendus divisor.

4. Quamvis dividendus tam magnus sit, ut divisor in eo contineatur vel decies & eo amplius, nunquam tamen quotiens assumendus major uno charactere, neque una vice ultra 9 sumendum.

5. Quoties post divisionem aliquid supermanet, illud seorsim scribendum, subductâ virgulâ, & sub eadem Virgula scribendus Divisor per modum fractionis.

EXEM-

Exempl. Regulæ I.

§. I. Cupio scire an præsens annus 1622. sit bissextilis, vel Intercalaris? Bissextilem annum vocant Mathematici, qui diebus constat 366, & nullâ horâ; In quo Februarius dies habet 29. nascitur que unus hic dies ex collectione sex horarum. Nam annus quisque vulgaris (ut obiter dicam) est dierum 365 & 6 horarum. Hæ sex horæ collectæ per 4. annos, quarto quoq; anno dant unum diem (quater 6 sunt 24 & totidem horis constat dies) Hic unus dies intercalatur seu interponitur inter 24 & 25 Februar. unde mensis ille dierum 29. Sed de his aliàs. Cupio scire an præsens annus 1622. sit bissextilis. Divido igitur 1622 per 4 hac ratione. Principio divisorem 4 non colloco sub 1, quia 1 minus est quam 4. sed sub 6, per Regulam primam. Tum quæro, quoties 4 contineantur in supra scriptis 16? Invenio contineri quater. Itaq; 4 scribo post Lunulam. Secundò

1 6 2 2
4 4 4 (405
1 6 2 0

multiplico hunc Quotientem 4 in divisorem 4 proveniunt 16: præcisè subscribenda superio-

 ribus

```
        2
      2 6
  1 7 0 8 8 (356
    4 8 8 8
  2 4 4 0 8
      4 4
    2 4 8
      2
```

Promoveo divisorem locatis 4 sub 6, & 8 sub 8. Iterum quaero quoties 4 in 26? Continentur quidem sexies, nam quater sex sunt 24. At propter sequentem divisoris characterem 8, qui satis magnus, sumo saltem 5. scribendum post circulum. Porro multiplico hunc novum quotientem 5. in totũ divisorem 48 proveniunt 240, ordine subscribenda summis 268? Fiat subtractio 240 de 268 relinquuntur 28? Divisorem promoveo postremâ vice, & 4 suppono ipsis 8.8. verò ipsis 8. Quaero quoties 4 in 28? Continentur quidem septies, sed ob causam jam dictam, & per Regulam a sumo solum 6. ascribenda reliquo quotienti. Deinde multiplica per hac 6 ipsa 48, proveniunt 288, quae à superioribus 288 ablata relinquunt nihil. Igitur 17088 asses faciunt coronatos 356.

7. III

7. III. Regulæ 3. *Numeravit mihi aliquis 2400 duplos solidos Lubec: Quæritur quot ii faciant marcas Lub: Octo dupli dant 1 ℔. Dividuntur 2400 per 8. Per Reg. primam, positis 8 sub 4.*

2 4 0 0
8. 8. 8. (300.
2 4

Quæro quoties 8 continentur in 24? Invenio 3 Ter 8 sunt 24 Quatuor de 4, 2 de 2 remanet nihil. Promovetur Divisor, 8 in nihilo non continetur. Igitur per Reg. 3, scribatur cyphra post semicirculum; Et promoveatur divisor ulterius: 8 in 0, etiam non continentur. Ascribo iterum 0. Et peracta est operatio. Unde propositi asses dupli faciunt 300 ℔.

8. IV. Regul. 4. *Quæritur quis sit aureus numerus Anni 1622. Aureus numerus est series 19. annorum, intra quos novilunia & plenilunia creduntur reverti ad pristinas sedes. Is ita investigatur. Ad annum Christi datum adjice 1. quia Christus natus eo fuit anno, quo Aur. Num. 1. fuit: fiunt 1623. Hoc productum dividatur per 19. Quoties continetur 1 in 16?*

Quam-

1 0 8
1 6 2 2   (85 $\frac{8}{19}$
1 9 9
1 8 2
1 5
9

Quamvis vel decies & eo amplius, imò sedecies contineatur, tamẽ per Reg. 4, nõ licet supponere ad summum, nisi unũ characterem. Hic ponimo 8, per Reg. 2. ob divisoris sequentem novenarium 9, quæ maxima est. Multiplico 19, per 8, proveniunt 152, auferenda ab 162, relinquuntur 10. Promotus divisor ad figuram sequentem quæritur, quoties in 10? Non ausim assumere nisi 5. Facta multiplicatione fiunt 95 auferenda à 103, supersunt 8, Itaq; dati anni 1622 situm aur. est 8: Si ea 8 scribantur per modũ fractionis juxta Reg. seq. fient 85 $\frac{8}{19}$. Unde colligo à nato Christo ad usq; datum annum, octies seriem Cycli aurei effluxisse, octuagies quinquies cum octo decimis nonis, id est, superesse octo, de Cyclo aureo pro anno dato.

V. Regula 5. Imperator vel dux militum debet 16 militibus aureos 2689. Hi si inter illos

illos 16 distribuuntur, quæritur quotnam unusquisq; miles sit accepturus?

```
      1
    1 0 2 1
    2 6 8 9      (168 1/61
    1 6 6 6
      1 6 8
      9 1
      1 2
```

Post factam operationem proveniunt 168 & à subtractione supermanet 1. quod per Regul. 4. suprascribendum est divisori interjecta lineola, hac facit $\frac{1}{16}$ *Accipit ergò quisque miles aureos 168 &* $\frac{1}{16}$, *id est, unam decimam sextam partem aurei. Quid significet hæc fractio, & quantum, paulò post docebimus in doctrinâ de numeris Fractis.*

COROLLAR. I.

9. Uti etiam licet *compendiis* in Divisione, haut minus quàm in Multiplic. quæ *alia* sunt.

I. *Unitas* quemadmodum non multiplicat ita nec dividit. Numerus igitur dividendus per unum, retineatur uti est. Nec opus hic ulla operatione.

II. Si

II. Si numerus dividendus est *per 10*, auferatur à dextris character unus, & peracta divisio. Si dividendus *per 100*, auferantur characteres duo; si *per 1000*, tres. Figuræ verò ablatæ scribantur supra Divisorem per modum fractionis. Si cyphræ ablatæ fuerint non opus est ulla fractione.

Exemplum. *Senatus in publico quodam ædificio extruendo sumptus fecit aureorum 64520. Eos refundere debent cives, qui numero 100. Dividatur datus numerus per 100. Id est abjiciantur duæ priores figuræ 20, & peracta est divisio. Itaq; unicuiq; civi persolvendi 645 aurei, cum $\frac{20}{100}$ id est viginti centesimis, seu $\frac{2}{10}$ vel $\frac{1}{5}$ Nam hæc idem valent, ut in Fractionibus docebimus. Si iidem 64520 aurei dividi deberent inter cives 10 abjiceretur 0, & sine omni fractione cederent civi cuilibet 6452 aur.*

COROLLAR. II.

10. Ut per additionem Subtractio, & vice versâ, sic *per multiplicationem divisio*, & per hanc illa probatur. Qui per multiplicationem productus est numerus, si

per multiplicantẽ dividatur, provenit iterum multiplicandus. Item qui per divisionem inventus est quotiens, si per divisorẽ multiplicetur, restituit multiplicandum.

A 123	C 5535		
B 45	B 45	(123 A.
C 5535		

Esto A multiplicandus: B multiplicans. Productum C Hoc divisum per B si reddit A, argumento est operationem absque errore esse institutam. Ita esto C dividendus, B divisor: A Quotiens. Si A per B multiplicatum restituat ipsum C, rectè expedita est divisio.

PROPOSITIO VI.

Numeros Progressionum per Compendium Multiplicationis & Divisionis colligere in unam summam.

1. *Progressio quid sit & quotuplex.*
2. *Progress. Arithmetica numeri quomodo addantur.*
3. *Quot vicibus sonet horologium:*

4. Mer-

4. *Mercatus ovorum.*
5. *Additio progressionis Geometricæ.*
6. *χοιρογρυλλοφόροις.*

Quanquam hæc res propriè debeatur *Propositioni secundæ*, quâ docuimus instituere numerorum additionem, distulimus tamen eam *in hunc locum*, non alia de causa, quàm quia absq; Multipl. & Divis. expediri nequit, quarum istic nondum tradita erat explicatio. Alioquin ignotum demonstrassemus per æquè ignotum.

1. Sunt quidam numeri qui æquo ordine & proportione sese invicem consequuntur; quam seriem Mathematici Progressionem vocant, faciuntque duplicem, *Arithmeticam* & *Geometricam*. *Arithmetica* est, quando æquabili excessu omnes numeri sese superant, *uti in his exemplis*; 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. vel 1. 3. 5. 7. 9. 11. vel 1. 4. 7. 10. 13. *Inter istos differentia & excessus est 1. Inter illos 2. Inter hos 3.* *Geometrica* est, quando non est æquus excessus, sed in prioribus minor, in posterioribus major, ita ut primus toties contineatur à secundo, quoties secundus à tertio, tertius à quarto:

quar-

quartus à quinto: *Ut in his exemplis*: 1. 2. 4. 8. 16. 32. vel 1. 3. 9. 27. 81. *In istis, velut 2 sunt duplum de 1. ita 4 duplum de 2 & 8 duplum de 4. In his, ut 3 sunt triplum de 1. ita 9 triplum de 3: & 27 triplum de 9: Et 81 triplum de 27.*

Si jam hujusmodi numeri postulentur *addi*; non opus erit alterum alteri subscribere, uti amat fieri in exemplis cæteris additionum, sed *compendiosâ Methodo* res expedietur.

PROGRESS. ARITHM.

2. In ordine vel progressione Arithmetica, *ita agito.* 1. *Numera* quot sint addendi numeri: Id seorsim nota. 2. Primum & ultimum numeros invicem *adde*, simulq; summam nota seorsim. 3. Horum duorum numerorum alterutrum, qui scilicet par est, bipartitò *divide*, vel illius sume dimidium, & per hoc dimidium multiplica alterum. Quod prodit est quæsita summa. Totam praxin in hoc versiculo comprehenderunt antiqui.

Connumeres, Addas, Divide, Multiplica.

EXEMPLA.

3. I. *Quæritur quot vicibus sonet Horolo-*

logium ab 1 usque ad 12? id est, quantum faciant omnes hi characteres simul collecti. 1.2.3 4, 5.6.7.8.9.10.11.12. *Initio invenio eos esse 12. Dehinc addo duos extremos, 1. & 12 fiunt 13, Alterutrius ipsorum sc. 12 sumo dimidium quæ sunt 6. & multiplico 13 per 6 proveniunt 78: Integra summa datorum numerorum.*

4. II. *Paterfamilias emit 12 ova, eâ conditione & lege, ut pro primo solvat nummum; Pro secundo 3: pro tertio 5, atque ita ulterius crescente nummorum numero per binarium. Quæritur quanti empturus sit ova? Numeri ita habent.* 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23. *Suntq; numeri duodecim. Nunc 1. & 23. addita faciunt 24. Dimidium de 24 sunt 12. Multiplica 12 per 12 vel 24 per 6 (quæ est medietas de 12) proveniunt 144 nummi.; qui divisi per 12 (nam totidem nummi faciunt assem) dant 12 asses. Igitur emit 12 ova pro 12 assibus.*

PROGRES. GEOMETRICA.

5. Oblati numeri, qui Geometricam obtinent Progressionem, *ita adduntur.* 1. Vide quis sit numerus, per quem omnes Progressionis tuæ characteres multiplicando sunt producti, qui facilè invenitur

ex Excessu duorum proximorum. Hic doctrinæ gratia vocetur Radicalis. 2. Per hũc radicalem multiplica ultimum tuæ progressionis numerum. 3. Ab hoc producto aufer numerum Progressionis primum. 4. quod relinquitur illud divide per Radicalem, si huic prius unitatem subtraxeris. Quod provenit est quæsita summa. Versiculus antiquus talis est;

Multiplices, Demas, Divide, summa datur.

EXEMPLA.

6. Mercator à Rustico tres porcos emit, eâ lege ut pro primo pede solveret assem unum; pro secundo 2. pro tertio 4 *pro quarto 8 servatâ semper proportione dupla; Quæritur quantum futurũ sit pretium omne porcorum. Tres porci pedes habent.* 12. *Erunt igitur* 12. *characteres Progressionis Geometri:* 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. *Principio video omnes numeros esse productos per multiplicationem binarii. Nã bis* 1 *sunt* 2. *bis* 2. *sunt* 4. *bis* 4. *sunt* 8. *Numerus ergo radicalis est* 2. *Ulterius per* 2. *multiplico postremum* 2048, *proveniunt* 4096. *Ab hoc producto si auferam* 1, *primum scilicet pro-*

gressionis characterem, manent 4095. Postremo Radicalis 2, diminutus unitate fit 1. Cum quo dividenda essent 4095. At quia per Prop. prac. Coroll. 1. Reg. 1. unitas non dividit, itaque absoluta est operatio: Et summa pecunia seu omnium assium est 4095, qua divisa per 16 (16 enim asses dant 1 ₺) faciunt 255 ₺ 15 ₰ pretium trium porcorum.

PROP. VII.

Ex Quolibet Numero quadrato

Radicem extrahere.

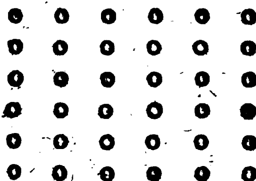
1. *Quid sit quadratus numerus.*
2. *Quid Radix.*
3. *Quid sit extractio Radicis Quadrata.*
4. *Processus Extrahendi radices.*
5. *Regula Extractionis R.*
6. *Milites quomodo disponendi in aciem quadratam.*
7. *Investigare longitudinem scalarum ad expeditionem bellicam.*
8. *Probatio Extractionis R.*

P*Ropositione quarta Coroll.* 1. docuimus Numerum quemq; seu Radicem multi-

plica-

plicare *Quadratè* & *Cubicè*. Nunc porrò docebimus, vice versa *ex Numero quadrato & Cubico Radices extrahere*. Primò sumemus in manum *Extractionem Radicis Quadratæ*.

1. Dicitur numerus *Quadratus*, quia si tali ordine disponatur, ut longitudo latitudinem non excedat, oritur figura quadrata ad hanc effigiem.



2. Numerus verò alter *Radix* dicitur seu *Latus*, quia ut ex radice arbor, sic ex hoc numero radicali nascitur numerus quadratus. *Latus* dicitur, quia ut latus alicujus superficiei ductum in seipsum, seu æqualiter extensum in longum & latum, procreat superficiem perfectè Quadratam, ita hæc radix ducta in seipsam gignit numerum quadratum.

3. Inde videre est, *Extractionem Radicis* nihil esse aliud, quàm inventionem Numeri alicujus simplicis, ex quo in seipsum multiplicato, procreatus fuit numerus propositus Quadratus. Habet hæc operatio *usum maximum* non solùm in doctrina Triangulorum, sed & in re militari, omnique Geometria, quemadmodum exempla declarabunt.

4. Numerus propositus Quadratus, cujus Radix est investiganda, *antè omnia* distinguendus est punctulis, qui primæ, item tertiæ, quintæ cunctisque imparibus characteribus supponantur, intermisso semper & præterito uno. Puncta hæc non tantùm serviunt commodiori operationi: Sed etiam monstrant, quot characteribus constet Radix inquirenda. Quot enim puncta, tot figurarum est radix. *Deinde* ducantur subtus lineæ duæ parallelæ: quibus ita dispositis, *hæc quæ sequuntur* observantor ordine.

5. I. Numeri ultimi, seu figura una scribatur seu duabus, illius scilicet, qui est prope ultimum punctum, quæratur radix, vel ex ta-

ex tabula Pythagorica, vel multo commodiùs ex hâc:

R.	Q.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

Ea radix sub ultimo puncto intra lineas scribatur, & hujus quadratum praecise subscribatur numero supremo, qui est ad minumum punctum.

2. Auferatur hoc quadratum superiori; Quod relinquitur supra scribatur. Haec investigatio Radicis semel quidē & sub initium operationis est facienda; nunquam verò repetenda ampliùs, sed sequenti ratione instituenda porrò operatio.

3. Quidquid est intra lineas, illud multiplicetur per 2, seu dupletur: duplumque hoc scribatur sub lineis inter duo puncta, quod fungetur officio Divisoris.

4. Quaeritur quoties hic divisor contineatur in superiori? Quotiens scribatur

 intra

intra lineas sub altero puncto. Et (quod apprimè est notandum) asscribatur quoque Divisori.

5 Divisor multiplicetur per secundum hunc Quotientem.

6. Productum auferatur à superiori, planè ut in Divisione.

7. Tum si plura sint puncta, incipiatur à Regulâ tertiâ duplicatio, & absolvatur porrò tota praxis ad finem usque, ad præscriptum Regularum sequentium.

8. Si quid postremo post factam subtractionem supermanet, illud disponendũ per modum Fractionis hac lege. Quidquid invẽtum est intra lineas (id est Radix) multiplicetur per 2. Producto semper addatur unitas, & superscribatur id, quod remansit.

9. Eædem Cautelæ observandæ, quæ in divisione, scilicet 1. ne quotiens assumatur justo major. 2. Si inferior in superiori ne semel continetur, ut tunc loco quotientis scribatur Cyphra.

EXEMPLA.

§. 4. *Habet Dux aliquis Milites in aciem* quæ-

quadratam disponendos 54756. Quaeritur quot debeant conjungi milites in unâ rectâ lineâ, ut ex omnibus fiat acies quadrata? Quia propositus numerus est aut esse debet quadratus, icircò Latus illius unum est Radix. Extrahatur proin ejus Radix, ea ipsa erit Numerus militum in uno latere vel lineâ collocandorum.

1 1 8
5 4 7 5 6
. . .

2 3 4

4 4 3 6 4
1 2 9 5 6
1 4
8

Figura prima 6 notetur puncto: Itē tertia 7 & quinta 5. Hac tria puncta monstrant Radicem scribi tribus characteribus. Deinde lineolas ago duas parallelas, quibus inscribentur Radices. Principio Numeri ultimi, vel 5, quaero Radicē ex praemissa Tabula. At in ea, (sub titulo Q.) non extant praecisè 5, imò, sumendus est proximè minor, quod perpetuò faciendū consimili

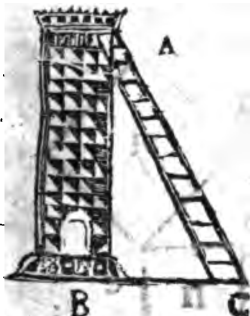
 casu.

rasu. Sumo igitur 4. cui è regione sub litera R. respondent 2. Hæc 2. scribo sub primo puncto intra lineas; estq; hic primus character Radicis inveniendæ. Tum etiam hujus radicis 2, quadratum 4, infra lineã subscribo ipsis 5. mox & ab iisdem aufero: manet 1. Hæc operatio non amplius repetitur: Sed jam porro aliã eundũ viã. Duplico quidquid est intra lineas, proveniunt 4. scribenda sub lineã medio loco inter duo suprema puncta. Ea 4. mihi sunt instar Divisoris. Hinc quæro 4 in 14? In assignata Tabula non invenio præcisè 14. Itaq; sumo proximè minorem numerum 9, cujus Radix 3. Hæc tria scribantur intra lineas sub secundo puncto, &, quod imprimis notandũ diximus, ascribantur etiã ipsis 4, infra lineas: quo facto ea ipsa 43 multiplicantor in omnem numerum infra lineas, id est, in 43. Fiunt 129. subtrahenda superioribus 147. remanentq; 18. Iã iterum duplico quidquid est intra lineas: nimirũ bis 23 sunt 46. Hic jam habeo divisorem 46. Quæro jam 4 in 18 quoties? In tabula non exstant 18 sed 16, quibus respondent 4, scribenda intra lineas sub tertio puncto, & mox etiã scribenda sub linea ultimo loco. Per hæc 4

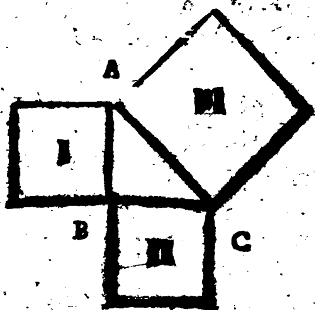
multi-

multiplicandus est totus numerus infra lineas. scilicet 464. proveniunt 1856. quæ ablata à supremo numero 1856. relinquunt nihil. Quod indicium est datum numerũ esse perfectè quadratum cujus Radix 234. Itaque prædicti milites, si statui & disponi debent in aciem quadratam, necesse ut in una linea seu latere quolibet ponantur 234, & sient totidem latera: Tumq; acies erit perfectè Quadrata.

7. 9. III. Dux Militum Urbem vel turrim invadere cogitat, quæ sit e.g. A.B. Cæterum turris circumdata est fossa, cujus latitudo B C. Constituit verò Dux scalis uti, easque admovere turris cacumini, quia ob stagnantem in fossa aquam non licet illi pedem admovere propiùs. Quæritur quanta debeat esse scalarum longitudo, ut à puncto C ad A usq; justo pertingant? Altitudo



titudo turris BA per Decempedatores inventa 30 pedum; Latitudo fossa BC 28 pedum. Hinc investiganda longitudo scalarum AC, qua facili labore invenitur per Extractionem Rad. ex eo fundamento Geometrico, quod habet Euclid. lib. 1. Prop. 47. Inibi demonstratum est, in omni triangulo rectò, quadrata duo, quæ describuntur à duobus lateribus circa angulum rectum, æqualia esse quadrato illi, quod describitur à latere, angulum rectum subtendente.



In apposito schemate Triangulum Rectum est ABC, Angulus ad B rectus Duo late-

latera angulum rectum includentia sunt AB, BC. & ab his descripta quadrata, I. II. Latus angulum Rectum subtendens est AC, & hujus quadratum III. Jam dicta Prop. demonstrat Euclid, Duo quadrata, scilicet I. II. simul sumpta, nec minora, nec majora, sed præcisè æqualia esse Uni Quadrato III. Itaque qui novit Quantitatem Quadratorum I & II. Is simul novit III. *Fiat applicatio ad Exemplum propositum. Turris AB, cum Horizonte BC facit angulum Rectum: Extructa enim est ad perpendiculum, quod semper ad Horizontis planitiem Rectangulum est. Fient igitur, AB, BC, latera angulum rectum includentia: & scala AC fiet latus angulo Recto oppositum. Cæterum duo ista priora latera cognita sunt, AB scilicet 30, BC 28 pedum: Ea si multiplicentur quadratè, proveniunt duo quadrata, I. & II. scilicet 900 & 784.*

30	28	900
30	28	784
I. 900	224	1684
	56	
	II. 784	

Quæ simul addita faciunt 1684 quadratū III, (cui quippe sunt æqualia) Hujus Latus unum vel Radix est A C, longitudo Scalæ, quæ quæritur. Investigatur Radix hac ratione. Dispositis & distinctis characteribus, quærantur in Tabulâ 16, ultimus scilicet supra puncta Numerus. Is præcisè invenitur cum Radice 4. Quatuor ergò notentur intra lineas sub puncto, & 16 sub lineis: ablatisq; 16 de 16 remanet nihil.

3
1684

4 1

1681

Dupletur quidquid est intra lineas: fiunt 8. scribenda inferius intra duo puncta, Hæc sunt loco Divisoris. Quoties 8 in 8 suprascriptis? Resp. semel, scribatur 1. sub primo, & protenus infra lineas prope ipsa 8. Tum cum 1, multipli-

centur

centur 81. Unitas autem non multiplicat per Prop. 4 Coroll. 2. Reg. 1. Igitur subtraho 81 ab 84 remanēt 3. Scribenda per modū fractionis $\frac{3}{83}$. Nam per Reg. 8. Radix 41 duplicata facit 82, quibus additū 1 facit 83, quibus suprascribenda 3 residua. Atq; ita inventū est latus A C, seu scala pedum 41 $\frac{3}{83}$. Loca tamen fractionis si pedem unum integrū adjeceris, poterit scala multò firmiùs collocari. Itaq; necesse est ut scala longa sit pedes 42 si justo & exactè complere debet spatium inter puncta C & A.

COROLLAR.

8. *Probatio* extractionis Radicum absolvitur beneficio multiplicationis. Inventā Radicem multiplica quadratè vel in seipsam: Provenier (si rectè operatus es) numerus oblatus, è quo Radix fuit eruta.

A	1 6 8 4		B	4 1
B	4 1 $\frac{3}{83}$			4 1
				4 1
				1 6 4
				1 6 8 1
				3
			A.	1 6 8 4

In exemplo jam proposito: sit A Quadratus, B illius Radix inventa.

Multiplicetur B in seipsam, provenient 1681, quibus adde 3 superflua, per modum fractionis scriptus, habebis Quadratum integrum 1684. Demonstratio dependet ex *Def. 5. & 6.* Nam quia Quadratus numerus est, *per def. 6*, qui sub duobus numeris æqualibus continetur, *utique erit A quadratus, quia continetur sub duobus B. Proinde B erit planus, vel Radix per def. 5. ipsius A. Et rectè inventus est planus: rectè quoque quadratus.*

PROP. VIII.

Radicem ex Numero Cubico extrahere.

1. *Quis sit numerus Cubicus & Radix Cub.*
2. *Progressus Extrahendi Rad. Cub.*
3. *Regula Extract. Cub.*
4. *Cognita capacitate cistæ, invenire latus ejusdem.*
5. *Cellula apiarii.*
6. *Probatio Extract. Cubic.*

SI quis benè exercitatus fuerit in extrahenda quadratorum Radice, eum non potest latere ratio extrahendi Radicis etiam ex *cubis, ex Quadratis de Quadrato*, ex *sur-*

surfolidis, & si quid est præterea Numerorum Multiplicium.

1. *Prop. 4. Coroll. 1.* diximus *Numerum cubicum* esse, qui genitus fuit ex multiplicatione Radicis in seipsam, & ejusdem radicis multiplicatione iterũ in productum. *Ut si Radix sit 4. Quadratum erit 16. Et cubus 64. Hic 4 sunt Radix cubica de 64.*

2. *Extractionem Radicis cubicæ hac Methodo* proponimus, & totam operationem certis includimus Regulis. *Primo* necesse est ut Numeri Cubici distinguantur per puncta. Velut in extractione Radicis Quadr. puncta ita notantur, ut saltus fiat per unum characterem: Ita in extractione Cubica notandisque punctis, saltus fit per characteres duos: In Quadratis de Quadr. per tres: In surfolid. per quatuor. Hâc igitur primam à dextris figuram puncto nota: Post intermissis duabus sequentibus quartam itidem: Rursus intermissis duabus septimam, atque ita ulterius. Sed & tabulâ hîc opus est, quæ continet Cubos numerorum simplicium, qualis hæc apposita.

3. His

R.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Q.	1.	4.	9.	16	25.	36.	49.	64.	81.
C.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

3. His expeditis instituenda est *operatio* juxta *Regulas sequentes*.

I. Numerus ultimus supra punctū quæratur sub titulo C in Tabula: quæ si illum præcisè non exhibet, sumatur proximè minor. Et excerpatur Radix cubica ei respondens, sub titulo R. Hæc erit quotiens scribenda intra lineam sub puncto primo.

II. Radicis hujus numerus Cubicus in tabulâ inventus, subtrahatur à supremo illo supra punctum primum. Quod remanet suprascribatur. Hoc primum fit, nec repetitur pòst ampliùs.

III. Velut in Extractione Quadratâ duplicatur, quidquid est intra lineas, ita in Cubitâ triplicatur, & insuper ducitur duplum radicis in tripli dimidium, vel (quod idem) radix in triplum, & quod provenit est Divisor. Tot enim oportet multiplicationis fieri in divisore constituendo, quot multi-

multiplicationibus talis numerus constituitur: Ut quoniã Cubus duabus multipl: producitur, fiunt duæ multipl: Primò sumitur triplum: deinde radix ducitur in idem triplum, quod productum est, est divisor, cui subscribatur linea.

IV. Inventus divisor quæritur quoties contineatur in [illegible]eriori? Quotiens scribatur intra lineas sub secundo puncto.

V. Ut habeatur numerus subtrahendus, non jam instituenda est simplex multiplicatio divisoris in Quotientem inventum, ut in Rad. Quadr: sed aliquoties multiplicandum. Nimirum 1. Quotiens inventus est multiplicandus cubicè: qui cubus scribatur sub secundo puncto: 2. Quadratum Quotientis inventi ducitur in triplum Radicis primo omnium inventum, & productum scribitur uno loco à puncto ulteriùs versus sinistram. 3. Quotiens inventus ducitur in divisorem; & productum adhuc uno loco porrò scribitur versus sinistram. 4. Omnes hi numeri colliguntur in unam summam subscriptâ illis lineâ.

VI. Hæc summa aufertur à superiori, Quod

Quod relinquitur est suprascribendum, ut moris est. Hic totus est processus, toties repetendus, quot puncta fuerint. Exempla declarabunt rem.

4. I. *Habeo arcam quandam precisè quadratam, cujus longitudo latitudini & profunditati aqualis. Hac suâ soliditate complectitur pedes quadratos [illegible]648. Cupio scire quot pedũ sit longitudo vel latitudo vel profũditas cista: Hac latitudo est latus, seu Radix corporis Cubici, hunc in modum extrahenda.*

	2	* *Radix Cubica.*
	1̸ 7̸ 6 4 8	*Triplum Radicis vel Numerus primus.*
	• •	* *Radix ducta in Triplũ hoc: vel Divisor.*
*	2 2	*Cubus quotientis, vel dea*
*	8 6	* *Quadratum quotientis (4) ductum in Triplum (6) vel numerum primum.*
*	1 2	
*	• • • • 8	
*	• • 2 4	* *Quotiens (2) ductus in divisorem (12)*
*	• 2 4	
	2 6 4 8	*Numerus additus subtrahendus.*

Distin-

Distinguantur primus (8) & quartus (0) characteres punctis. Tum in Tabula quærãtur 10. sub titulo C. quæ, quia non exstant, sumantur proxima 8. Quibus respondet R. 2. subscribenda primo puncto. Hæc octo inventa ablata à superioribus 10. relinquunt 2. Hic est primus labor non amplius repetendus. Porrò Triplica Radicem 2, vel id, quod est intra lineas, fiunt 6. scribenda sub 4. eo scilicet Charactere, qui proximè antecedit punctum. Eandem radicem 2 duc in hoc triplum 6. fiunt 12. Uno loco porrò scribenda: Et subducatur virgula. Hæc 12. sunt divisoris loco. Quæritur jã, 12 quoties in 26. suprascriptis: invenio bis. Radix ergò est 2. scribenda sub puncto sequenti. De hinc multiplicetur hæc radix 2. Cubicè, fiunt 8, scribenda justò sub puncto. Insuper ejusdem Radicis 2. quadratum, (quod est 4) ducatur in Triplum vel numerum primum 6. fiunt 24. scribenda uno loco ulterius. Denique idem quotiens 2. ductus in Divisorem 12. facit 24. scribenda adhuc uno loco ulterius. Trahatur linea & colligantur omnes numeri intra lineas in unam summam fiunt 2648. quæ subtracta à superioribus 2648. relinquunt nihil.

nihil. Itaque unum latus cistæ est pedum 22.

5. II. Esto apiarium vel alveare Cubicum; id est, quadratis 6 lateribus circundatum; intra cujus capacitatem inventi sint favi vel cellæ vel loculamenta 42875. Quæritur quot sint in unoquoq; latere; latus quodlibet est Radix Cubica totius Cubici alvearis. Hæc extrahatur.

1 5	
42875	
	Radix Cubica
3 5	*Triplum Radicis, vel Numerus primus.*
27 9	*Radix ducta in Triplum, id est, Divisor.*
27	*Cubus quotientis (5)*
125	*Quadr 5 de Quotiente (25) in numer 2 primum (9)*
225	
135	*Quotiens (5) ductus in divisorem (27)*
15875	

Numerus additus subtrahit

Nom-

Notatis punctis, quaeritur ex Tabula, Rad: Cubica de 42. Hic numerus non extat. Sumo proxima 26. cum Radice 3 scribenda sub puncto. Ablatis 27 à 42 restant 15. Triplum Radicis inventa 3, est 9, scribenda sub 7, charactere scil. proximo sequenti puncto. Eadem radix 3 ducta in hoc triplum 9, facit 27, Divisorem ponendum loco sequenti: Ducatur linea. Quoties 27 in 158, vel 2 in 15? Invenio 5 quae altera est radix, ponenda sub altero puncto. Cubus de 5 est 125, supponendus ipsi puncto aut invento Quotienti. Quadratum Quotientis ejusdem est 25, quod ductum in Numerum primum vel triplum 9, facit 225, scribenda loco sequenti. Insuper Quotiens 5 multiplicatus in Divisorem 27 facit 135 ponenda adhuc loco ulteriori. Ducta lineâ hi numeri addantur. Proveniunt 15875, quae subtracta à supremis 15875 relinquunt nihil. Quodlibet ergo latus continet cellulas 35.

COROLLAR.

6. *Probatur* Extractio Radicis Cubicae, *per multiplicationem Cubicam inventa Radicis*; ut prodeat Numerus Cubicus, qui fuerat ante.

A. 42875
B. 35

Cubus est A Radix B multiplicetur B Cubice, provenit iterum A.

B	35
	35
	175
	105
	1225
	35
	6125
	3675
A.	42875



P. LAU-

P. LAUREMBERGI.

INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM.

LIBER II.

DE NUMERIS FRACTIS.

PROP. I.

Numerorum fractorum Naturam pernoscere.

1. *Quid sint fractiones vel minutiæ.*
2. *Quis Nominator, Numerator.*
3. *Fractionum varia genera.*
4. *Quæ fractio major, quæ minor.*



Numerorum integrorum constitutionem satis pro re nata explicuimus. Sequuntur *numeri fracti*, seu *minutiæ*, seu *particulæ*.

1. *Fractiones* nihil aliud sunt, quàm numeri significantes particulas aliquotas integri. Etenim ut integrum unumquodque seu Unitas, per additionem multarum unitatum potest augeri & excrescere in infinitum: Ita eadem unitas, seu idem integrum dissectione vel fractione potest comminui in infinitum. *Sit linea A B integrum aliquod, velut ulna. Hac si di-*



vidatur in quatuor partes æquales, particulæ hæ dicuntur fractiones vel minutia: ex quibus 4 partibus si sumatur una, ea dicitur una quarta seu quadrans, & ita pingitur $\frac{1}{4}$. *Si sumantur duæ, dicuntur duæ quartæ* $\frac{2}{4}$: *si tres, tres quartæ* $\frac{3}{4}$. Omnis numerus fractus iisdem characteribus exprimitur, quibus integer, interjectâ tamen virgulâ.

2. *Constat* enim *Fractio* duobus numeris, *superiore* & *inferiore*, distinctis per interjectam lineolam. Superior dicitur *Numerator*: Inferior *Nominator*. Nominat enim in quot partes integrum sit divisum, & alter numerat quot partes ex illis divisis

fint

fiat sumenda; quemadm. vetus habet versiculus.

Supremus Numerat, Nominat inferior,

Ad hoc exemplum, *hæc fractio* ¼ *vocatur una quarta: 4 sunt nominator: 1 numerator. Ille significat totum esse divisum in quatuor partes: hic monstrat unam ex illis 4 sumendam. Ita hæc fractio* ⅖ *significat duas quintas; quia si totum dividatur in quinq; partes, monstrat duas ex illis sumendas.* In universum, omnis numerus fractus denotat particulas, quæ nomen habent ab infimo numero.

3. Hinc etiam illud sequitur, quoties superior & inferior unius sunt valoris in fractionibus, toties denotari ipsum integrũ, ut ½ *si enim totum A B sectum* A—|—B *sit in duas partes, & ego utrumque sumo, an non sumo integrum ipsum?* Rursus superior seu Numerator, si major fuerit inferiore, tum fractio plus significat quam integrum, ut 5/4 fünff viertheil. *Nam si totum sit divisum in partes 4, & ego sumo tales partes quinque, profecto plus sumo quam integrum.* Tria igitur sunt genera Fractionum. I. Fra

ctio minor est integro, cum scilicet superior est minor inferiori, ut $\frac{2}{3}\frac{4}{7}\frac{30}{32}$. II. Fractio æqualis est integro, cum superior æqualis inferiori, ut $\frac{3}{3}\frac{8}{8}\frac{100}{100}$. III. Fractio major est integro, cum superior major est inferiore, ut $\frac{10}{8}\frac{23}{20}\frac{110}{60}$.

4. Porro quilibet etiam è vulgo novit, integrum quò in pauciores partes fuerit divisum, eò partes has esse majores quo in plures, eo minores. Hinc sequitur quia inferior numerus fractionis denominat tales partes, Fractionem fore majorem, quo Nominator fuerit minor. *Ut $\frac{1}{2}$ plus est, quam $\frac{1}{3}$ & hac adhuc plus quam $\frac{1}{4}$. Nam si totum sit divisum in duas partes, una duarum harum partium major erit, quam pars una, si idem totum divisum fuerit in 4 partes.*

PROP. II.

Minutias Minutiarum conjungere.

1. *Quid sint Minutia Minutiarum.*
2. *Ha Quomodo addenda.*

I. In-

I.

INterdum sese obferunt Minutiæ, ut vocantur, Minutiarum, seu fractiones aliarum Fractionum, ut $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{2}$: vel $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ *id est: si totum fuerit divisum in duas partes, & una istarũ duarum, iterum subdivisa in portiones quinque, deq; istis 5 sumantur 2, tum habentur duæ quintæ unius dimidii. Ita si totũ sit divisum in tres partes: una harum trium iterum divisum in 4. Ex quibus quaternis si sumantur tres, habeo tres quartas unius tertiæ partis.* Cum hisce Minutiis Minutiarum non licet operari, nisi prius in unam fractionem fuerint compositæ, quod fit hac ratione.

2. Numeratores seu superiores multiplica invicem: & quod provenit fit Numerator. Itidem multiplica invicem denominatores seu inferiores; & provenit Denominator fractionis, totaque fractio æquivalet omnibus minutiis minutiarum. Exemplum $\frac{3}{4}$———$\frac{2}{3}$ *sint reducenda in unam Fractionem. Multiplico 3 per 2 fiunt 6 futurus Numerator. Et 3 per 4 fiunt 12, futurus Nominator. Itaq; $\frac{6}{12}$ æquivalent tribus quartis de duabus tertiis.*

PROP. III.

Ex minutiis quæ majores sunt integro integra facere: Et vice versa integra resolvere in Minutias: Itemq; ex Integris & Minutiis facere unam fractionem.

SÆpissimè usu venit, quod in Exercitiis Arithmeticis non semper numeri fracti habeantur, sed quandoque etiam integri: Hæc integra necessum est ut prius resolvantur in fractiones. Sunt itidem fractiones, quæ plus valent integris, etiam has convertere oportet in integra. Sunt denique numeri compositi ex integris & fractis, qui perducendi ad unam fractionem.

I. Quoties *fractio* se offert *plus valens integro*, id est, cujus Numerator major Denominatore, hæc reducetur ad integra, diviso per Inferiorem superiore. Exemplum: $\frac{103}{4}$ *quantum valent? Divide superiorem per inferiorem proveniunt* 25 & *supermanent* $\frac{3}{4}$.

Tota-

2
7 ø 3 (25 $\frac{3}{4}$
4 4
8
2 ø

Totaq; fractio $\frac{103}{4}$ *nihil aliud est quam* 25 $\frac{3}{4}$.

II. Convertuntur *integra in fractiones*, si illis subscribatur linea, & item unitas: *ut 17 integra conversa in fractionem, ita habent* $\frac{17}{1}$. At verò unum integrũ solvi potest in fractionem cujuscunque Nominis & numeri ut $\frac{4}{4}\frac{10}{10}\frac{17}{17}$ *nihil sunt nisi unum integrum per Pro. 1. hujus.*

III. Sed longè frequentius postulatur *integra, quibus minutia* adhærent, permutari *in Fractiones*. Id ità fiat. Integrũ ipsũ ducatur in denominatorem fractionis, sive numeri annexi: quod provenit, ei addatur Numerator, & subscribatur fractionis denominator. Exemplum: *Resolvenda sint in unam fractionem* 5 $\frac{1}{2}$ *Multiplico 5 per 2, fiunt 10, quibus addo 1. sunt 11. quibus subscribo nominatorem 2. sitq; fractio* $\frac{11}{2}$ *aequalis* 5 $\frac{1}{2}$. *Ita* 6 $\frac{3}{4}$ *valent* $\frac{27}{4}$. *Ita* 9 $\frac{1}{5}$ *valent* $\frac{46}{5}$.

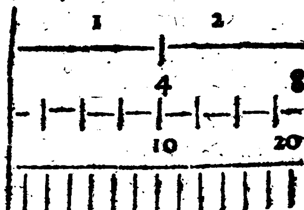
COROLLAR.

Demonstratio hujus rei & examen, dependet ex his, quæ diximus *Regula* 1. *hujus Prop.* Etenim quia Fractiones, quæ oriuntur ex Integris ita reductis, perpetuo majores sunt integris, si dividatur harū fractionum Numerator per Nominatorem, proveniunt eadem integra cum Minutiis, *ut in* $\frac{11}{2}$ *divisis* 11 *per* 2 *proveniunt* $5\frac{1}{2}$.

PROP. IV.

Fractiones majores ad minores reducere.

EA est Fractionum fertilitas & fœlicitas, ut una eademq; proportio & idem valor diversis numeris & fractionibus exprimi possit. Itaq; facilioris operationis gratiâ Arithmetici maximas fractiones revocant ad minimas. *Sint tres lineæ A. B. C. ejusdē planè longitudinis A divisa in 2 partes B in 8, C in 20: si ex A sumpsero* $\frac{1}{2}$, *habebo lineæ dimidium.* Ex



Ex B si sumpsero $\frac{4}{8}$ *etiam habebo dimidium. Item ex G* $\frac{10}{20}$ *dimidium. Vides* $\frac{1}{2}\frac{4}{8}\frac{10}{20}$ *nihil aliud esse quam dimidium, & prorsus aequivalere.* Caeterùm in Exercitiis Arithmeticis annon consultius fuerit, & minoris molestiae usurpare unam secundam, quam $\frac{4}{8}$ *vel* $\frac{10}{20}$? Haec causa est, quod oblata fractio maxima reduci debeat ad minimam; Atque illud ita efficies.

I. Observa an Numerator *dimidium* sit Nominatoris, quod ipsum primo intuitu facilè persentisces. Tum non opus erit ulla reductione, sed substituatur $\frac{1}{2}$ *ut*, $\frac{24}{48}$ *quia 24 sunt medietas de 48, idem valent quod* $\frac{1}{2}$.

II. Videsis an Numeratoris seorsim considerati sumere queas dimidium, vel partem tertiam, quartam &c. Itemque Inferioris: id est, an uterque sit divisibilis in partes aequales: tum has partes assume loco fractionum. Nam idem valent. Ut, $\frac{4}{6}$ *idem sunt quod* $\frac{2}{3}$, *quia dimidium de 4 sunt 2: & dimidium de 6 sunt 3. Ita* $\frac{9}{12}$ *idem sunt quod* $\frac{3}{4}$. *Dividi enim uterque tam 9 quam 12 potest in partes aequales tres: Si-*

quidem ter 3 sunt 9, & ter 4 sunt 12. Ita $\frac{20}{25}$ *idem sunt quod* $\frac{4}{5}$ *uterq; enim aequaliter divisibilis est per quinarium.*

III. Si *Cyphrae* adhaeserint *utrique* & Numeratori & Nominatori, illis aequaliter *abjectis* remanet minor Fractio, *ut* $\frac{10}{150}$ *idem sunt* $\frac{1}{15}$.

IV. Si nulla praecedentium Regularum absque difficultate uti licet, tum *sequenti formula* agendum. Auferendus est fractionis numerus minor à majori; & à residuo iterum auferendus est minor, ab hoc residuo iterum minor, quousque duo numeri aequales se offerunt, vel unus numerus bis reperiatur. Per hunc ipsum dividendus est tam Numerator, quam Nominator datae magnae fractionis & habebitur Numerator ac Nominator fractionis minoris. Exemplum. $\frac{15}{70}$ *quaeritur quam habeant fractionem minimam? Fiat, juxta Regulam, continua ablatio minoris à majori, pervenietur tandem ad 5 geminata. Hinc divide per 5 Nominatorem 70, veniunt 14: Et numeratorem 15, veniunt 3. Ergo* $\frac{3}{14}$ *est*

est minima fractio, æquivalens ipsi $\frac{15}{70}$. Hic notabis. Si in subtractione non inveniantur duo numeri similes, vel ejusdem denominationis, sed fiat progressus usque ad unitatem, argumento est, non posse dari minorem fractionem ejusdem valoris, quam illa, quæ est proposita. Ut $\frac{5}{11}$ non possunt deduci ad minorem fractionem. Nam si minorem à majori sæpius, ut jussimus, auferas, reperies unitatem.

70
15
55
15
40
15
25
15
10
5
5

PROP. V.

Cujusq; Fractionis Valorem invenire.

QUantum unaquæque Fractio valeat, & crebro & utiliter inquiritur. Fractio refertur ad totum, vel Integrum cujus est Fractio *Ex.gr.* $\frac{2}{3}$ *thaleri ad thalerum:* $\frac{1}{2}$ *ulnæ ad ulnam.* Si quis jam investigare voluerit valorem fractionis, is primo omni-

minium consideret integrum ipsum, cujus est Fractio. Dehinc multiplicet fractionis numeratorem in partes Integri familiares, seu in quas integrum dividi solet vulgariter. Productum dividat per nominatorem fractionis, & quod provenit, est quaesitus valor.

EXEMPLA.

I. Quantum valent ⅔ unius Marcæ Lubecensis? Marca continet 16 asses. Multiplica 16 per numeratorem 2, fiunt 32: Ea divide per Nominatorem 3, provenient 10 asses & ⅔ unius assis. Sed & quantum valent ⅔ unius assis? As habet nummos 12. Duc 2 in 12 habebis 24. Ea divide per 3, invenies 8 nummos. Proin. ⅔ unius ♎ valent 10 ß 8 ₰.

II. Curatores Ecclesiæ aut Ptochotrophii singulis septimanis in 24 pauperes distribuunt 40 ♎. Quaritur quantum accipiat unusquisq;? Divide 40 per 24. Proveniunt 1 ♎ 16/24 vel per Prop. 3 ⅔ unius Marcæ. Quantum valent ha ⅔? Marca constat assib. 16: Multiplicatam 16 per 2 dant 32: quæ divisa per 3 faciunt 10 asses & ⅔ unius assis. Quantum faciunt ⅔ unius assis? As continet nummos

12. Mul-

12 Multipl. 12 per 2 fiunt 24, quæ divide per 3, proveniunt 8 nummi. Quilibet igitur pauperum capit 1 ♎ 10 ß 8 ₰.

PROP. IV.

Fractiones ad eandem Denominationem revocare

FRactiones diversarum denominationum illæ dicuntur, quæ Nominatores habent diversos, ut $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{7}$ *Hic 5 & 7 non sunt ejusdem nominis sed diversi.* Hujusmodi fractiones non possunt addi invicem vel subtrahi, nisi reducantur ad eandem denominationem. Nam *velut monetas diversarum specierum*, Marcas, asses, nummos non potes in summam colligere, nisi prius Marcas resolveris in asses, hos in nummos, atque tum feceris summam omnium. *Ita fractiones diversarum specierum* non possunt conjungi, nisi ex diversis illis speciebus fiat una. *Ita* verò *ages.* Oblatarum Fractionum denominatores invicem multiplica: Quod provenit esto denominator communis, adeoq; bis scribatur,

batur, additâ superiùs lineâ. Dehinc decussatim seu per crucem multiplica superiorē unius fractionis, in inferiorem alteriùs, & nasciscéris duos numeratores, ascribendos denominatoribus jam inventis. *Exemplum* $\frac{3}{5}$ *&* $\frac{2}{3}$ *reducenda ad eandem denominationem; Primum multiplica 5 per 3.*

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \qquad \frac{9}{15} \qquad \frac{10}{15}$$

fiunt 15, communis denominator. Tum tria per 3 faciunt 9. Duo per 5 sunt 10. Numeratores quæsiti. Fiunt $\frac{10}{15}$ *&* $\frac{9}{15}$ *æquales* $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$, *factaq; est reductio ad eosdem denominatores. Fractiones istæ tantùm valent, quantum hæ. Id saltim interest, quod majoribus scribantur numeris. Nam si* $\frac{10}{15}$ *itemque* $\frac{9}{15}$ *revocaveris per Prop. 4 ad minores numeros, invenies*

$\frac{3}{5}$ *&* $\frac{2}{3}$.



PROP.

PROP. VII.

Fractiones in unam summam colligere.

SEquuntur dehinc *quatuor affectiones* Numerorum Fractorum; *Additio. Subtractio, Multiplicatio, Divisio*, quæ facillimo negotio, & ullo labore perdisci possunt, modo aliquis sit certus propositionum præcedentium. I. *Minutiæ addendæ* si fuerint *ejusdem Nominatoris*, addantur Numeratores, subscripto Nomine communi. II. Si addendæ fractiones *non sint ejusdem* sed diversæ denominationis, reducantur ad idem Nomen *per Prop. 6.* Et tum fiat additio juxta Regulam primam. III. Si dantur addendæ fractiones, *quibus adnexa sunt integra* ex iis per *Proposit. 3. Reg. 3.* primum fiat una fractio: Tum per *Prop. 6.* reducantur ad eandem Denominationem: Denique *per Reg.* primam hujus, addantur numeratores servato communi nomine.

EXEMPLA.

Reg. I. *Addenda sint* $\frac{2}{7}$ *&* $\frac{3}{7}$. *Hic eadem est denominatio. Itaque adde 2 & 3, fiunt 5,*

quibus subscribe 7, habent $\frac{5}{7}$ totam summam. $\frac{3}{7}$ + $\frac{2}{7}$ fac. $\frac{5}{7}$.

Reg. II. *Addenda sint $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{5}$. Hic nomina diversa revocentur ad similitudinem, per propos. 6 sunt $\frac{10}{15}\frac{9}{15}$. Numeratores additi faciunt 19, & cum denominatore communi $\frac{19}{15}$, quæ summa est addendarum fractionum, major sanè integro. Si fiat reductio per Prop. 3. Reg. I. habetis $1\frac{4}{15}$ tantum scilicet faciunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{5}$.*

III. Sint addenda plures fractiones, quales hæ $\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{5}\frac{1}{20}$ Primum adde duas priores, prius reductas ad unam denominationem per Pr. 6. faciunt $\frac{10}{16}$ Tum adde duas posteriores eadem lege, faciunt $\frac{5}{20}$ Jam adde $\frac{10}{16}\frac{5}{20}$ facto prius communi nomine, sunt $\frac{243}{320}$ vel in minoribus numeris, facta divisione per 3. juxta Prop. 4. $\frac{31}{40}$.

IV. Reg. 3. *Sint addenda integra cum minutiis; $3\frac{1}{5}$ & $\frac{4}{5}$. Primum integra cum fractis reducantur ad fractionẽ unam, per Proposit. 3. Reg. 3. sunt $\frac{1}{5}$[illegible] addenda $\frac{4}{5}$. Fiat ex iis idem nomen per Prop. 6. & erunt [illegible]. Addantur Numeratores, subscripto communi nomine, sunt [illegible]. Hæc fractio major est integro.*

gro. Fiant ex eâ integra per Proposit. 3. Reg. 1. proveniunt $4\frac{7}{7}$. *Tot faciunt addita invicem* $3\frac{3}{4}$ & $\frac{3}{4}$.

PROP. VIII.

Numeros fractos invicem subtrahere.

QUum *Fractiones* observantur *subtrahenda*, I quibus est *eadem Denominatio*: in his minor numerator subtrahitur majori, & subscribitur denominator communis: *ut* $\frac{5}{8}$ *ablata à* $\frac{7}{8}$ *relinquunt* $\frac{2}{8}$ *vel* $\frac{1}{4}$. II. At verò si *fuerint denominationum diversarum*, reducuntur primùm ad similitudinem, quemadmodum factum in additione: *ut* $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ *sunt subtrahenda. Reducta ad eandem denominationem faciunt* $\frac{8}{12}\frac{9}{12}$. Aufer 8 à 9 *remanet* 1, *cui subscribe* 12, *habes* $\frac{1}{12}$. III. Quod si *integra adhaeserint* fractionibus, non potest fieri subtractio (ut nec additio) nisi prius ex integris & fractis conficiatur una fractio: *ut auferenda sunt* $\frac{3}{4}$ *à* $2\frac{1}{4}$. *Conversio fiat ad unam fractionem; fiunt ex* $2\frac{1}{4}$, $\frac{9}{4}$. *Jam quia* $\frac{9}{4}$ & $\frac{3}{4}$ *sunt diversi nominis, vertuntur in denominationem*

tionem unam, erunt $\frac{45}{20}\frac{12}{20}$. Auferatur numerator minor à majori, 12 de 45, supersunt 33; & tota fractio $\frac{33}{20}$ major integro, cujus superior divisus per inferiorem relinquit $1\frac{13}{20}$.

IV. Si *ab integro uno* (absque minutiis) auferendæ sunt fractiones, tum frangitur integrum in nomen, datæ fractioni simile: atq; ita fit subtractio. Exemplum I. $\frac{3}{4}$ *unius ulnæ debent auferri ab integra ulnâ, quæritur quantum restet: Frange ulnam unam in consimilem denominationem, hoc modo $\frac{4}{4}$ (quæ æquivalent integro per Prop. 1.) jam aufer 3 à 4, superest 1. cui subscribe 4, communem Nominatorem. fit $\frac{1}{4}$ quæ super est si $\frac{3}{4}$ ab ulnâ unâ auferantur.*

II. *Auferatur $\frac{1}{5}$ thaleri ab integro thalero. Fractus Thalerus & reductus ad nomen simile, ita habet $\frac{5}{5}$. Aufer 1 à 5, remanent 4, quibus subscribe 5. Restant igitur $\frac{4}{5}$ Videamus valorem hujus exempli: $\frac{1}{5}$ thaleri per Proposit. 5. facit 11 ß. Integer enim jam valet 55 ß vel 3 ℔ 7 ß. Et quinta pars de 55 sunt 11. At verò $\frac{4}{5}$ per eandem Prop. 5. valent 44 ß. Vides igitur si 11 ß auferantur à 55. remanere 44, id est si $\frac{1}{5}$ auferatur à $\frac{5}{5}$ superesse $\frac{4}{5}$.*

PROP.

PROP. IX.

Numeros fractos invicem & cum integris multiplicare.

SI I. uterque multiplicandus fuerit *simplex fractio*, (absque integris) duc Numeratorem unius Fractionis in numeratorem alterius, & oritur Numerator producti: Item duc Nominatorem unius in nominatorem alterius, & provenit Nominator producti. *Ut: Multiplicanda* $\frac{2}{3}$ *per* $\frac{2}{5}$ *duc 2 in 2 fiunt 4: & 3 in 5 fiunt 15: & tota fractio* $\frac{4}{15}$*: quod erit productum quæsitum.*

$\frac{2}{5}$ - - $\frac{2}{3}$ *fac.* $\frac{4}{15}$.

II. Si *integra adhæserint* fractionibus, reducantur in unam fractionem per *Propofit. 3. Reg. 3.* & fiat multiplicatio juxta Regulam jam traditam: *ut 3* $\frac{1}{2}$ *multiplicanda per* $\frac{3}{5}$ *Ex integris cum dimidio fit talis fractio* $\frac{7}{2}$ *Jam invicem multiplicati numeratores dant 21: & Nominatores itidem invicem ducti faciunt 10; proinde tota fractio, & productum* $\frac{21}{10}$.

III. Si *fractio* multiplicari debet *per integra, vel integra per fractionem*; tum in-

integris subscribatur unitas per *Proposit. 3. Reg. 2.* factaque est fractio, & instituatur operatio ut jubet Regula: *ut: 6 sint multiplicanda per* $\frac{5}{7}$. *Fingantur* $6\frac{6}{1}$. *Fiat multiplicatio Numeratorum, itemq; Nominum invicem, proveniunt* $\frac{30}{7}$ *productum quaesitum.*

Quanti usus sit Multiplicatio, & quae sequitur Divisio, id demum videre licebit in Regul. Proport: Jam pergimus ad Divisionem.

PROP. X.

Fractiones per Fractiones & per integra dividere.

SI I. *pura fractiones* offeruntur dividendae, ducatur superior dividendi in inferiorem Divisoris: Et nascitur Quotientis Numerator. Vice versa ducatur superior divisoris in inferiorē dividendi, nascitur; nominator Quotientis: seu ut paucis & compendiò dicam: multiplicentur hi numeri per crucem, & proveniet quaesitum.

$\frac{3}{8} \bowtie \frac{4}{5}$ *fac.* $\frac{15}{32}$.

Ut: sint dividenda $\frac{3}{8}$ *per* $\frac{4}{5}$: *Duc 3 in 5 fiunt 15. Et 4 in 8, fiunt 32. Et totus Quotiens* $\frac{15}{32}$.

II. Si

II. Si *integra cum Fractis* debent dividi *per fractiones*; reducantur prius integra cum fractis in unam fractionem, *per Prop. 3. R. 3.* & tum fiat multiplicatio decussatim, ut legis est. *Sic* $5\frac{1}{4}$ *dividenda per* $\frac{4}{5}$. *Ista reducta ad fractionem dant* $\frac{21}{4}$. *Jam quinquies* 21 *faciunt* 105, *& per* 4 *fac.* 12: *unde tota fractio* $\frac{105}{12}$.

$5\frac{1}{4}$ $\frac{4}{5}$ *vel* $\frac{21}{4}$ ⋈ $\frac{4}{5}$ *fac.* $\frac{105}{12}$.

III. Si *fractiones* fuerint dividendæ *per integra* vel *vice versa*, subscribatur integris 1, *per Prop. 3. Reg. 2.* & fiat operatio ut Regula jubet: *sic*: 5 *integra dividi jubentur per* $\frac{1}{8}$ *fac.* $\frac{40}{1}$.

$\frac{5}{1}$ ⋈ $\frac{1}{8}$ *fac.* $\frac{40}{1}$.



P. LAU-

P. LAUREMBERGI.

INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM.

LIBER III.

DE RATIONIBUS, ET NUMERORUM PROPORTIONIBUS.

PROP. I.

Proportionum Naturam ac differentias cognoscere.

1. *Duplex numerorum consideratio.*
2. *Quid sit proportio.*
3. *Conditiones necessariæ requisita ad Proport.*
4. *Ratio æqualitatis & inæqualitatis.*
5. *Ratio majoris vel minoris inæqualitatis.*
6. *R. Multiplex.*
7. *R. Superparticularis.*
8. *R. Superpartiens.*
9. *R. Multiplex superparticularis.*
10. *R. Multiplex superpartiens.*
11. *Rationes minoris inæqualitatis.*

Quæ-


Uæcunque de Numeris in se & simpliciter considetatis dici potuerunt, integris juxta & fractis (quantum fuit præsentis instituti) ea hactenus nobis visa fuerunt. Nunc *altera Numerorum consideratio*, quæ *comparationem & respectum* includit, operas nostras & explicationem exposcit.

1. Diximus enim pridem numeros intelligi posse *gemino* conceptu, alio *absoluto*, sine omni relatione aut comparatione cum aliis, alio *comparato*, cum ad se invicem referuntur. Velut quum 4 comparantur cum 2: vel 8 cum 4, deprehendunturque habere rationem duplam. Hic initio sciendum quid *proportio* sit, quid item *Proportionalitas*.

2. *Proportio* ab *Euclid. l. 5. def. 3.* definitur hunc in modum: *Proportio est duarum quantitatum ejusdem generis mutua secundum quantitatem habitudo.*

3. Ad proportionem multa requiruntur. 1. Necesse est ut *duo* sint, nec plura nec

nec pauciora, inter quæ datur proportio. Proportio enim Relatio. Relatio omnis inter duo. II. Hæ duæ res sint *Quantitates*. Ita quum vel qualitates, vel substantiæ, vel alia quævis invicem conferuntur, Proportio propriè non est. III. Quantitates sint *ejusdem generis*; linea conferatur cum linea: Numerus cum numero. Non vero linea cum numero; vel numerus cum corpore. IV. Instituatur proportio *secundum Quantitatem*. Namq; si numerus conferatur cum Numero, quatenus alter niger est, alter ruber, non est vera proportio. Oportet comparari numerum cum Numero, quoad valorem seu Quantitatem.

4. Cæterum hæc comparatio aut collatio potest fieri vel inter numeros *æquales*, vel inter *inæquales*. Inter *æquales* est ratio æqualitatis, *ut* 2 *ad*, 2.4, *ad* 4, quam hic lubenter præterimus, utpote à nostro usu alienam. Cum *Numeri inæquales* invicẽ conferuntur, iterum *duplex* nascitur *varietas*.

5. Vel *major* confertur *cum minori*: vel vice versâ, *minor cum majori*. Ubi

major

major minori comparatur, quod fit in his exemplis 8. *ad* 4. 10. *ad* 5. 6. *ad* 3. Nascitur *Ratio majoris inæqualitatis*: Ubi è contra, *minor confertur majori*, provenit *Ratio minoris inæqualitatis*. In *ista* priorem locum obtinet numerus major: In *hâc* primus est minor. *Utriusque* prorsus eadem est Natura, eædem differentiæ, nisi quod Rationi *minori* semper addatur particula SUB, distinctionis gratia. Hæc Ratio est *dupla*, 4. *ad* 2. Hæc Ratio est *Subdupla* 2. *ad* 4. Utramque breviter explicabo. *Primum* Rationem *majoris inæqualitatis*. Ejus differentia est *quintuplex*.

Numerus major continet minorem.
1. *Bis aut aliquoties exactè, ut nihil superfit.*
2. *Semel cum una minoris parte.*
3. *Semel cum pluribus minoris partibus.*
4. *Aliquoties, cum una minoris parte.*
5. *Aliquoties, cum pluribus minoris partibus.*

9. (1) Numerus major *exactè & præcisè* continet minorem, ita ut nihil superfit: dici-

diciturque *Ratio multiplex*; & quidem *dupla* si bis; *tripla* si ter; *quadrupla* si quater major in se continet minorem. *Exempl.* 8 *ad* 4 *habent* rationem duplam: 15 *ad* 5 *triplam*: 20 *ad* 5 *quadruplam*.

2	6	12	25	36	14	24
1	2	3	5	6	2	3
Dupla,	*Trip*.	*Quad*.	*Quin*.	*Sextu*.	*Sept*.	*Octup*.

7. (11.) Numerus major continet minorem *semel*, sed superest *una minoris particula*, diciturque *Ratio superparticularis*. *Exempla* 4 *ad* 3 *habent Rationem superparticularem, quia* 4 *continent ipsa* 3 *semel*, & *insuper* 1, *quae est una particula ipsorum* 3, *diciturque ea* ratio sesquitertia: *quia* 4 *continent* 3 *semel*, & *unam tertiam partem*. *Ita inter* 5 & 4 *est ratio superparticularis sesquiquartæ, quia* 5 *continent* 4 *semel*, & *unam illius quartam partem*.

3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
Sesqui-altera	*Sesq. tert.*	*Sesq. qua.*	*Sesq. qui.*	*Sesq. sex-*	*Sesq. sept.*	*Sesq. octa.*	*Sesq. nona.*
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{7}$	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{9}$

Si major per minorem dividatur proveniunt

unt quotientes, qui valorem rationis, & causam appellationis aperiunt.

8. (III.) Numerus major minorem continet *semel*, & non unam, ut præcedens, sed *aliquot minoris partes*, vocaturque *superpartiens*. Si duabus minoris partibus minorem excesserit, dicitur *superbipartiens*; si tribus, *supertripartiens*; si 4, super *quadrupartiens*, cui appellationi additur adhuc *nomen minoris Quantitatis*.

EXEMPLA.

Inter 5 & 3 est Ratio superpartiens: & quidem super bipartiens tertias, *quia 5 continent ipsa 3 semel, & insuper duas partes ipsorum 3. Ita 7 ad 4 est Ratio supertripartiens* quartas, *quia 7 continent semel ipsa 4, & insuper tres partes (vel 3) ipsorum 4.*

I.

5	7	9	11	13	15
3	5	7	9	11	13
Superbi.	*Superb.*	*Superb.*	*Superb.*	*Sup.*	*Superb.*
tertias.	*quin.*	*septim.*	*nonas.*	*und.*	*dec. ter.*
$1\frac{2}{3}$	$1\frac{2}{5}$	$1\frac{2}{7}$	$1\frac{2}{9}$	$1\frac{2}{11}$	$1\frac{2}{13}$

Quotientes ex divisione majoris, per minorem, monstrant valorem, & rationem appellationis.

F II.

II.

7	8	10	11	13
4	5	7	8	10
Supertrip. quartas.	*Supert. quintas.*	*Supert. septim.*	*Supert. octav.*	*Supert. decim.*
$1\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{5}$	$1\frac{3}{7}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{3}{10}$

III.

9	11	13	15	17
5	7	9	11	13
Superquad. quintas.	*Superq. septim.*	*Superq. nonas.*	*Superq. undec.*	*Superq. dec. ter*
$1\frac{4}{5}$	$1\frac{4}{7}$	$1\frac{4}{9}$	$1\frac{4}{11}$	$1\frac{4}{13}$

9. (IV.) Numerus major continet minorem, non quidem semel ut in præteritis, sed *pluries*, & insuper *partem unam Minoris*, diciturque *Ratio multiplex superparticularis*. Exempl. *7. ad 3. habent* Rationem multiplicem superpart: *quia 7 continent ipsa 3 bis, & insuper particulam 1 ipsorum trium. Dicitur hac* ratio dupla-sesquitertia, *quia 7 sunt duplum de 3 & insuper una tertia pars. Ita 10, ad 3 sunt in Ratione multiplici superparticulari, & quidem* tripla sesquitertia. *Nam 10 continent ipsa 3 ter, & insuper unam partem de tribus.*

I. Di-

I.

5	7	9	11	13
2	3	4	5	6
Dupla ses-qui altera.	*Dup.ses-qui tert.*	*Dup.ses-qui quar.*	*Dup.ses-qui qu.*	*Dup ses-qui sex.*
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{5}$	$2\frac{1}{6}$.

II.

7	10	13	16	19
2	3	4	5	6
Tripla ses-qui altera.	*Trip.sesq. tertia.*	*Trip.sesq. quarta.*	*Trip.sesq. quinta.*	*Trip.ses-qui sex-*
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{5}$	$3\frac{1}{6}$.

10. (v.) Denique Numerus major continet minorem *pluries*, & insuper *aliquot minoris partes*, diciturq; *Ratio multiplex superpartiens.*

Exempl: *8 & 3 sunt in ratione multiplici superpartiente: quia 8 continent 3 bis, & insuper aliquot, id est, duas particulas de 3. Est verò hæc* ratio dupla superbipartiens tertias: *quia 8 est dupla de 3. & insuper binas continet tertias seu duas unitates.*

I.

8	12	16	20	24
3	5	7	9	11
Dupla sup. tertias.	*Dup. sup. quintas.*	*Dup. sup. sept.*	*Dup. sup. nonas.*	*Dup. su. undec.*
$2\frac{2}{3}$	$2\frac{3}{5}$	$2\frac{2}{7}$	$2\frac{2}{9}$	$2\frac{2}{11}$

II.

11	17	23	29	35
3	5	7	9	11
Tripla super part. Tertias.	*Trip. su. quint.*	*Trip. su. sept.*	*Trip. su. nonas*	*Trip. su. und.*
$3\frac{2}{3}$	$3\frac{2}{5}$	$3\frac{2}{7}$	$3\frac{2}{9}$	$3\frac{2}{11}$.

11. Ut jam ante monui, quæ indoles, quæque differentiæ Rationum majoris inæqualitatis, *eædem* sunt etiam *inæqualitatis minoris*, nisi quod *minor numerus præponatur*, & appellationi ipsius Rationis addatur vocula SUB; ut ex exemplis videre est.

I. Ratio submultiplex.

1	2	3	5	6
2	6	12	25	36
Subdupla.	*Subtrip.*	*Subquad.*	*Subqu.*	*Subsext.*

II. Ra-

II. Ratio Sub-superparticularis.

2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
Subsesqui-altera.	Subses. tertia.	Subsesq. quarta.	Subsesq. quinta.	Subses-qui.sex.

III. Ratio Sub-superpartiens.

3	5	7	9	11
5	7	9	11	13
Subsuperbip. tertias	Subsup. quin.	Subsup. sept.	Subsup. nonas.	Subsup. una.

IV. Ratio submultiplex super-particularis.

2	3	4	5
5	7	9	11
Subdupla sesqui-altera.	Subd. ses. tertia.	Subd. ses. quarta.	Subd. ses. quinta.

V. Ratio submultiplex super-partiens.

3	5	7	9
8	12	16	20
Subdup. super-bipart. tertias	Subdup. sup. qui.	Subdup. sup. sept.	Subdup. sup. non.

Atq; hæ sunt Rationum seu proportionum differentiæ.

PROP. II.

Proportionalitatis vel Analogiæ Naturam & differentias pernoscere.

1. *Quid sit analogia.*
2. *Analogia continua, discreta.*
3. *Analogiæ species.*
4. *Proportionalitas Arithmetica.*
5. *P. Geometrica.*
6. *P. Musica.*
7. *Controversia de Analogia Musica.*
8. *Pulcerrima Cubi consideratio.*
9. *Analogia Contraharmonica.*

I.

A *Proportione* differt *Proportionalitas* vel *Analogia*: Quemadmodum cum duo Numeri inter se conferuntur, oritur Proportio, ita cum *plures proportiones conjunguntur*, seu cum fit comparatio plurium Numerorum, nascitur *Proportionalitas.*

Exemplum. *Ut 2 ad 4, ita 8 ad 16. Habes analogiam: Quia duæ proportiones conjunguntur. Sic in his numeris est proportionalitas, ut 3 ad 6, sic 6 ad 9.*

2. Heic

2. Heic tres sunt numeri: Medius bis sumitur: Quod quoties evenit, Proportionalitas dicitur continua: at quoties semel sumitur, quatuorque discreti sunt numeri, fit Proportionalitas discreta.

Exemplum *Analogia continua* 2 4 8

Exemplum *Analogia discreta* 3 9 4 12

3. Quanquam *Boëtius* & *Jordanus*, illustres Mathematici, plures enumerent Analogiarum species, hodiè tamen tres in usu sunt celeberrimæ, Arithmetica, Geometrica, & Harmonica sive Musica.

4. Analogia Arithmetica (quam etiam Progressionē vocavimus *lib. 1. Prop. 6.*) est, cum plures coordinantur numeri, atque inter se conferuntur, inter quos eadem est excessus differentia: *Ut in his numeris 2 4. 6. 8. 10. 12. 14. Differentiam inter omnes ponit binarius. Nam per binarium quatuor excedunt ipsa 2. Et 6 superant ipsa 4 binario: adeoque inter omnes est æquale interstitium.*

5. Proportionalitas vel progressio Geometrica est, cum non servatur eadem differentia, aut idem excessus, sed eadem pro-

portio multiplex; *Qualis in his numeris: 2. 4. 8. 16. 32. Hac analogia composita est ex multis proportionibus subduplis. Nam 2 sunt dimidium de 4. Et 4 dimidium de 8. Ita Analogia Geometrica horum numerorum 2. 6. 18. 54. composita est ex proportionibus subtriplis. Nam 2 sunt pars tertia de 6. Et 6 pars tertia de 18 &c. Inter 2 & 6 intersunt 4. Inter 6 & 18 sunt 12. Hic non servatur eadem differentia, ut in Proportione Arithmetica.*

6. Denique Proportionalitas Musica est, cum numeri ita sunt ordinati, ut ea sit proportio ultimi ad primum, quæ est differentiæ inter duos ultimos, ad differentiam inter duos primos, aut vice versâ, in quibus proportio prioris differentiæ ad differentiam posteriorem, eadem est cum proportione minoris extremi ad majus extremum.

Exemplum habes in his numeris. 3 4 6 (1 2) *Etenim ut 3 ad 6 (proportio subdupla) ita 1 ad 2. seu differentia inter duas primas 3. 4. ad differentiam inter duos ultimos, 4. 6. vel inversim.*

Ut

Ut 6 ad 3: sic 2 ad 1. Haut aliter in his 6 8 12 *ut 6 ad 12, ita diff. 2, ad diff. 4, vel vice versâ, ut 12 ad 6, ita 4 ad 2.*

7. Quæsitum est apud Arithmeticos anne Proportionalitas Harmonica in pluribus quam tribus terminis dari possit? Multi negârunt; 1. quia accuratissimus scriptor Boëtius non attulerit usquam pro Exemplis illius, nisi tres numeros z. Tum prætereà, quia analogia quæ est inter 2.3.6. imò infinitæ aliæ, non possint ulterius extendi, nec iis addi quartus terminus eandem servans analogiam. Respondemus 1. Boëtium ejusque exempla, nec esse pro lege, nec quidquam prævalere contra veritatem. Usurpaverit ille non nisi tres terminos, non idcircò sequitur non posse dari quatuor. 2. Tres illi termini 2. 3. 6. & infinitæ aliæ analogiæ Musicæ, non queant sanè continuari aut extendi ad characteres plures? Sunt ab altera parte infinitæ, quæ possunt continuari.

8. Ne prolixus sim, videat mihi æquus

æstimator, & benè atque appositè consideret *Cubum, qui cum habeat superficies 6 angulos solidos 8, latera 12, angulos superficiales 24, pulcherrimâ ideâ Harmonicam Proportionalitatem quatuor terminorum proponit hanc:*

2 4 12

6 8 12 24

Nam ut 24 ad 8, sic differentia 12 ad 4. Item ut 12 ad 6, sic diff. 4 ad 2. Vel itinere adverso, ut 6 ad 12, sic 2 ad 4: Et ut 8 ad 24, sic 4 ad 12.

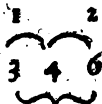
9. Præter hanc Analogiam Harmonicam agnoscunt etiam elegantiores Arithmetici Contraharmonicam, quæ prioris est quasi inversa: cum scilicet Proportio prioris differentiæ ad differentiam posteriorem, eadem est cum proportione majoris extremi ad minus: *qualis hæc* 3 5 6 (differentiæ 2 1)

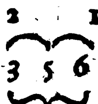
Ut 3 ad 6, sic è contrario 1 ad 2. Vel ex adversum, ut 6 ad 3 retrorsum, sic 2 ad 1 antrorsum.

Vide-

Videbis discrimen, in utraq; Analogia juxta se positâ,

Harmonica. *Contraharm.*





PROP. III.

Rationes inter se addere.

FAcillimâ methodo Rationes invicem conjunges, si antecedentes earum terminos in se multiplicaveris: itemq; terminos sequentes inter se. *Ut ratio sesquialtera & sesquitertia inter se addita, faciunt Rationem duplam: Nam termini Rat: sesquialtera sunt* 3 — 2
Rat: sesquitertia sunt 4 — 3
quæ invicem multiplicata dant 12 — 6*, id est Rationem duplam: nam 12 sunt duplum de 6.*

PROP. IV.

Rationes à se invicem subtrahere.

SUme terminos rationum, eosq; decussatim vel per crucem multiplica; id est :

ſubducendæ rationis terminum conſequentem, ducito in antecedentem alterius; prodibit antecedens relictæ Rationis. Reliqui duo termini multiplicati conſequens producunt. *Ut ſesquitertia ſubducenda eſt à ſesquialtera. Termini ſesquialteræ ſunt* 3—2

ſesquitertiæ 4—3

duc 3 in 3 naſcitur antecedens, 9: & 2 in 4 producit conſequens 8, rationis relictæ. 9—8 *Eſt verò inter 9—8 Ratio ſesquioctava, quæ relinquitur ſubductâ ſesquitertiâ à ſesquialtera.*

PROP. V.

Rationes datas multiplicare.

RAtio cujus multiplex petitur, addenda toties quotuplex expetitur. *Ut ſi velim ſesquialteram multiplicatam per triplā, aut (quod idem) velim triplam ſesquialteræ, ter addo ſesquialteram Rationem, per prop. 3, (quod fiet ſi ejus quantitatem ter poſitam in ſe multiplicem.)*

& pro-

3——2
3——2
3——2
27——8

& provenit Ratio 27—8: cujus termini inter se divisi, dant $3\frac{3}{8}$, Itaq; ratio tripla supertripartiens octavas provenit, ex multiplicatione sesquialteræ in triplam.

PROP. VI.

Rationes datas dividere.

NOn omnes Rationes dividi possunt: sed illæ solum quarum termini admittunt numerum medium in continua ratione: Quæ medium hujusmodi non agnoscunt, illæ nequeunt dividi in rationes alias æquales, numeris explicabiles. *Ut rationis sesquialteræ termini sunt 3—2: quos inter, quia nullus cadit numerus medio loco proportionalis, idcirco negamus eam Rationem dividi posse.* Cæterùm oblatæ Rationis, quæ dividi jubetur, 1. terminos in se multiplica: 2. Hoc productum si est perfectus numerus quadratus, qui radicem habet argumento est, datam Rationem dividi

vidi posse, & dari numerum medio loco proportionalem. Nam hæc Radix ipsa producti, est medius proportionalis; monstratq; rationes in quas data Ratio dividi potest: Si productum, ex multiplicatione terminorum proveniens, perfectè quadratum non est, & radice plenâ destitutum, divisio datæ Rationis nulla dari potest. *Ut dividenda est Ratio dupla sesquiquarta, cujus termini 9--4: Hi invicem multiplicantur, fiunt 36: qui numerus perfectè quadratus est, cujus radix 6. medio loco proportionalis. Itaq; dicta Ratio dividitur in 9- 6. & 6.-4. id est in duas rationes sesquialteras; Nam ut 9-6 est 1½: ita & 6-4 est 1½. Sic Ratio septupartiens nonas, cujus termini 16--9, dividitur in duas sesquitertias: Nam 16--9 multiplicati dant 144, numerum plenè quadratum; cujus Radix 12, medio loco proportionalis, monstrat duas Rationes continuas 16--12. Et 12--9 quæ sunt sesquitertiæ; Nam ut 16--12 est 1⅓ sic 12--9 itidem est 1⅓.*

Propr.

Prop. VII.

Datis tribus numeris, tam integris quam fractis, invenire quartum Proportionalem: Regula DE TRI, directa.

1. *Variæ appellationes hujus Regulæ.*
2. *Quod & quales hic numeri.*
3. *Regula aurea duplex.*
4. *Regula Detri directa, & ejus processus.*
5. *Quot Mill. passus, pedes, digitos, grana, contineat totius terræ ambitus.*
6. *Elegans compendium Regulæ aureæ in fractionibus.*
7. *Proportio Regulæ aureæ.*

I.

HAnc Analogiam communiter nominare solent *Regulam Trium*: quia *tres* dantur numeri cogniti, & per illos quartus ignotus invenitur. Vocatur quoque *Regula aurea*, ab excellentia. Nam quod *aurum* est inter metalla, illud Regula hæc inter propositiones Arithmeticas. Dicitur etiam *Regula Philosophorum & Mercatorum*: quia ii sæpiùs eâ utuntur.

2. Con-

2. Constat verò & constituitur *tribus numeris*, quorum *duo* sunt ejusdem denominationis, si materiam spectemus, nimirum primus & ultimus: *Medius* autem alius est generis, ejusdē tamen cum Quarto, qui inveniri debet: Ut: *Si 2 ulnæ emuntur 4 ß quanti emuntur 5 ulnæ?* Hic primo loco sunt ulnæ: secundo marcæ, tertio iterum ulnæ: proveniunt quarto loco iterum marcæ, alternis scilicet vicibus.

3. *Duplex* verò est *Regula aurea*, alia *simplex*, alia *composita*. *Simplex* iterum *gemina*, vel *directa*, vel *inversa* aut *obliqua*.

4. *Directa* quæ vocatur, ejus totum negotium *unica multiplicatione* & *unica divisione* expediri potest, quemadmodum etiam obliqua; sed indirecta multiplicantur invicem duo posteriores, & productū dividitur per primū: In obliqua multiplicantur invicem duo priores, & productum dividitur per postremum. Quod primū ad *Directam* attinet, ea locum habet vel 1. in numeris integris duarum denominationum: vel 2. in Integris plurium denomina-

natio-

nationum: vel 3. in integris quibus adhærent fractiones: vel 4 in puris fractionibus. I. Si sint integra *duarum denominationum*, Multiplica numerum ultimum per secundum, & productum Divide per primum: quod provenit est Quartus numerus quæsitus. Qui Multipl. & Divis. perfectè norit, is facilem inveniet hujus propositionis praxin. Præcipua opera consistit in probe disponendis numeris, ubi illud quod jam jam dixi, apprimè velim observari; scilicet ultimum & primum debere esse ejusdem Nominis: Alioquin longè aliud provenit, quàm sperabatur.

EXEMPLA.

I. Viator aliquis iter faciens, 4 diebus percurrit 29 milliar: quot Mill. absolvet diebus 9? Numeri ita disponuntur.

Dies Mil. Dies Mil.

4 —— 29 —— 9 —— *fac.* 65 $\frac{1}{4}$.

primo & ultimo loco sunt dies, medio Mill. multiplica 29 per 9 proveniunt 261: Hæc divide per 4, habebis 65 $\frac{1}{4}$, *numerum quæsitum: ut 4 ad 29 sic 9 ad 65* $\frac{1}{4}$.

II. Vo-

II. *Volumina chartacea 20 emuntur 3 fl vel 48 assibus, quanti constabunt 135 volumina consimilia?*

Vel ß *vol*

20 — 48 — 135 *fac.* 324 ß

fl

Vel 20 — 3 — 135 *fac.* 20 fl $\frac{5}{20}$ *vel* $\frac{1}{4}$ *vel* 4 ß.

multiplicentur 135 per 48: veniunt 6840 quæ divisa per 20, fac. 324 ß id est (divisione facta per 16,) 20 fl $\frac{1}{4}$ seu 4 ß. vel 3 multiplica 135 per 3, fiunt 405, quæ divisa per 20, dant 20 fl & $\frac{5}{20}$ seu 4 ß.

5. *III. Cupio scire quot passus, quot pedes, quot digitos, imò quot grana complectatur totius Globi Terr. circumferentia, sub maximo circulo, ut Æquatore vel Meridiano? Observatum est à Mathematicis, si quis in terrâ iter fecerit XV. Mill. mutationem in cœlo factam esse unius gradus, seu uni gradui respondere Mill. Germ. XV. Itaq. integra peripheria Circuli maximi (quæ est grad. 360) efficiet peripheriam integram in terrâ Mil. Germ. 5400. Porro 1 mill. Ger. continet passus 4000: Hinc disponantur numeri hâc ratione.*

Mil.

Mil. Pass. Mill.

1—*dat*, 4000 *quid* 5400?

Multiplicato ultimo per medium proveniunt 21600000 *pass. dividendi per primum. At unitas non dividit. Tot igitur passuum erit tota telluris circumferentia. Ulterius quisque passus continet pedes* 5. *Sic jam fiat:*

Pas. ped. pass.

1—*dat* 5—*quid* 21600000?

Factâ multiplicatione (quia divisione opus non est, ob 1.) *proveniunt* 108000000 *pedes, quos continet Terræ circumferentia. Denique pes quilibet constat XVI. digitis. Fiat igitur* Pes. Dig. Ped.

1—*dat* 16—*quid* 108000000? *reperies* 1728000000. *Postremo unus digitus continet grana* 4. *Unde fiat.*

Dig. Gra. Dig.

1—*dat*—4—*quid* 1728000000?

Proveniunt 6912000000 *grana, quibus juxta sese positis, æqualis est Telluris totius maxima circumferentia.*

II. Si obferuntur exempla *diversorum nominum & rerum*, tum reducenda erunt

erunt ad eandem denominationem, atq; tum instituenda, ut dictum est, operatio.

EXEMPLA.

I. *Uno anno persolvit aliquis pro victu 286 ₰, quantum solvendum est una septimana? Hic annus & hebdomas sunt diversa nomina: Itaq; reducenda ad similitudinem. Pro anno 1 substitue hebdomadas 52, fietq; Regula talis.*

H ₰ Heb.

52 —— 286 —— 1 *F.* 5 ₰ 8 ß

II. *Operarius aliquis uno mense & 2 dieb. pro labore accipit* 12 ₰ 14 ß, *quantum accipit diebus 7? reduc marcas ad asses fiunt* 192 *quibus adde* 14, *erunt 206. Etiam pro mense uno substitue dies 30, & adde 2, sunt 32. Hinc talis erit numerorum dispositio.*

Dies ß *Dies*

32 —*dant* 206 —*quid 7? Fac?* 45 ß $\frac{1}{18}$

III. Si *integris adhaserint minutia*, reducantur in unam fractionem *per Prop. 3. Reg. 3. l. 2.* Item si partim obferantur *integra*, partim *fractiones*, fiant & ex integris fractiones, & tum procedatur ut præceptũ jubet.

Ex-

EXEMPLA.

Pertica 2 lignorum venduntur 8 ℔ $\frac{3}{4}$, quanti veneunt pertica $5\frac{1}{2}$? per Prop. 3. lib. praced. adornentur numeri hoc modo.

Pert.

$\frac{2}{1}$ dant $\frac{26}{3}$ quid $\frac{11}{2}$.

Multiplica ultimum per medium provenient $\frac{286}{6}$, quas divide per primum fiunt $\frac{286}{12}$ quae fractio reducta ad integra per eandem Prop. 3. facit, 23 ℔ $\frac{10}{12}$ vel $\frac{5}{6}$, id est 13 ß 4 ₰ Per Prop. 5 lib. praced.

IV. Hinc vides *in meris purisq; fractionibus facilem quoq; esse Regula aurea expeditionem.* Eadem enim sunt praecepta. Idem calculandi modus. Multiplica ultimum per secundum, & productum divide per primum.

EXEMPLUM.

$\frac{1}{4}$ ulna emitur $\frac{2}{3}$ unius marca, quanti emuntur $\frac{3}{4}$ ulna? post factam operationem provenient $\frac{12}{6}$ id est 2 ℔.

COROLLAR.

6. I. Non possum praeterire quin elegantissimum *compendium Regula aurea in fractionibus* adjungam. Id tale est.

Dispo-

Dispone numeros ut moris est. Primum verò illorum ita inverte, ut ex numeratore facias nominatorem & vice versa: quo facto omnes numeratores vel superiores tres multiplica invicem: Habebis numeratorem producti. Item multiplica omnes inferiores, vel denominatores invicem, habebis denominatorem producti. Exemplum mox positum tale erit:

Ulnæ. ℔ *uln.*

$\frac{1}{4}$ —— $\frac{2}{3}$ —— $\frac{3}{4}$ *fac.* $\frac{1}{6}$ 2

Prima fractio si transponatur, sic habebit.

$\frac{4}{1}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ *fac.* $\frac{1}{8}$ 2.

Hic solùm multiplica omnes superiores inter se, fiunt 24: item omnes inferiores, fiunt 12, Et totum productum $\frac{24}{12}$ *vel* $\frac{1}{6}$ 2 *vel* 2 ℔.

7. 11. *Probatio Regulæ aureæ* si quæritur, non ea aliunde peti potest commodius quam à divisione, per quam numeri iterum resolvuntur in sua principia. Per secundum numerum divide productum: serva quotientem: item per primum divide tertium: serva quotientem. Si Quotientes hi duo iidem fuerint benè instituta est operatio. Exemplum in integris:

Typographo pro 4 foliis imprimendis persol-

solvuntur 12 $\frac{1}{2}$; quantum pro foliis 10? proveniunt 30.

4 —— 12 —— 10 —— *Fac.* 30.

Examen. *Divide productum 30, per secundum 12 fiunt* $2\frac{6}{12}$ *vel* $\frac{1}{2}$. *Item per 4 divide* 10 *proveniunt* $2\frac{1}{2}$: *Quotiens utrobivis idem est : Proinde operatio rectè instituta. In fractis.*

$\frac{1}{4}$ —— $\frac{2}{3}$ —— $\frac{3}{4}$ *Fac.* $\frac{12}{6}$

Ex divisione producti per medium fiunt $\frac{36}{12}$ *id est* $\frac{3}{2}$ *Primi verò per tertium* $\frac{12}{4}$ *i e.* $\frac{3}{1}$ *Quotientes sibi similes.* Demonstratio est evidens. Nam cum eadem prorsus sit Proportio prima ad Tertium, quæ secundi ad productum, necessariò sequitur eundem quoque numerum provenire ex divisione istorum, quæ ex divisione horum.

PROP. VIII.

Ex tribus numeris datis invenire quartum proportionalem. Regula Detri obliqua.

HActenus vidimus Reg. auream directam. Est & *alia* quam vocant *inversam,*

sam, in qua quidem numeri eadem serie & ratione disponuntur, quâ in Directa; verùm *Multiplicatio* instituitur non inter ultimum & Medium, sed *inter medium & primum*: Et *productum dividitur per ultimum*. Ejus usus est in illis exemplis, in quibus numerus quartus non debet augeri, sed minui. Exempla edocebunt rem.

EXEMPLA.

1. Messores quinque agrum aliquem demetere possunt, intra sex dies: Quot diebus eundem agrum demetent 10 messores? Vides hîc non posse institui operationem per Regulam Directam. Nam alioquin numerus quartus excresceret, & fieret major, quod tamen fieri nec potest nec debet. Nam si quinq; viri sex dies requirunt ad opus, profectò decem viri pauciores multò requirent, idq; ex fundamento Aristot. qui lib. post Physic. docet accrescentibus viribus diminui tempus. Igitur in hoc & consimilibus exemplis, semper primus est multiplicandus per secundum, & productum dividendum per tertium. Multiplica 5 per 6.

Mei.

Mes. Di. Mes. Di.

5——6——10 *Fac.* 3.

exsurgunt 30, *quæ divide per* 10, *proveniunt* 3. *Itaque* 3 *dies requirunt decem messores, ubi* 6 *dies postulabant* 5.

II. Est fons sex canalium. Ex iis si tres fluxerint, replent subjectam cisternam intra dies 4. *Quæritur si omnes* 6 *fluxerint, quot dies postulent ad cisternæ repletionem?*

Can. Dies. Can. Dies.

3——4——6——*Fac.* 2

Multiplica 3 *per* 4 *fiunt* 12. *quæ divide per* 6 *accipies* 2.

III. Dux aliquis obsidione cinctus cum 3000 *militibus, victum habet in* 7 *menses. Jam si ei manendum adhuc esset in obsidione per Menses* 12, *quæritur quot milites illo victu possit alere?*

Mens. Mil. Mens. Mil.

7——3000——12 *Fac.* 1750.

Multiplica primum per secundum, fiunt 21000. *Hæc divide per* 12, *proveniunt* 1750 *Tot scilicet militibus victus sufficit: Cæteri ergò dimittendi.*

Facilis est hujus Regulæ expeditio, si

animum probè intenderis in naturam Exemplorum.

PROP. IX.

Invenire Numeros Rationis Multiplicis; quæ dicitur Regula Detri Duplex, vel composita.

PRopositione 7. not. 3. fecimus Regulam auream *Simplicem* & *Compositam*: *Illa* explicatâ, *hæc superest*; quæ revera nihil est aliud, quam *Regula aurea bis repetita*. Conjunguntur enim multæ rationes, multique numeri, & ut plurimum quinque. Nec hujus Regulæ praxis difficilis, si numerorum oblatorum seriem probè observaveris.

EXEMPLA.

I. Studiosus aliquis devehendam curat in patriam, supellectilem suam librariam, & pro 20 pondo per 5 milliaria vehenda solvit 10 asses, quantum illi solvendum pro 100 pondo devehendis per 30 milliaria? Numeri ita collocantur.

P. M.

P. M. § P. M.

20——5——10–100——30.

Hoc exemplum (ut & omnia alia hujus Regulæ) expediri potest duabus operationibus Regulæ aureæ directæ. In primam operationem assumantur RES: Hocq; perpetuò debet observari. In secunda sit spacium vel loci vel temporis. Sic ergò age.

P. § P. §.

20 *dant* 10 *quid* 100 *fac.* 50.

Proveniunt 50. *Hæc* 50 *sed hoc productum medio loco collocandum hac ratione.*

Mill. § Mill.

5 —*dant* 50 *quid* 30? *Fac.* 300.

Itaque 300 *solidi solvendi, si* 100 *libræ debent vehi per* 30 *Mill.*

II. Centum marcæ dant lucrum 12 *Marc: intra biennium. Quantum dant* 1000 *Marc. intra annos* 10? *Sic ponantur numeri*

♎ *Luc.* ♎ *Luc.*

100 *dant* 12, *quid* 1000? *fac.* 120

an Luc. an

Rursus 2 —*dant*—120—*quid*—10? *Fac* 600.

Hoc scilicet est lucrum 1000 ♎ *intra annos* 10.

PROP. X.

Proportionem numerorum invenire talem, qualem habet Prop. 12. lib. 7. Euc. hodie dicitur Regula Consortii.

1. *Regula Consortii duplex.*
2. *Absque tempore.*
3. *Cum tempore.*

EX hac propos. Euclidis Arithmetici deducunt *Regulam* quandam, quam vocant *Consortii* vel *societatis*; quia usurpari solet *in negotiationibus*, quas communi consortio & societate exercent Mercatores, quanquam & aliis rebus ac quæstionibus applicari possit. Est verò & ipsa nihil aliud, quã *Regula aurea aliquoties repetita*.

1. Duas agnoscit varietates I. *absq. tempore*. II. *Cum tempore*. Neutrà Regulis copiosis indiget; sed paucis præceptis, & exemplorum evidentia facilè discitur.

2. *REGULA CONSORTII absq; tempore.*

Ubi *absque tempore* quæstio est; *ita agendum*.

dum. 1. addatur vel collatæ pecuniæ, vel quævis res per societatem à pluribus contributæ. 2. Ea summa ponatur loco *primo.* *Secundo*, damnum vel lucrum commune: *Tertio*, speciales pecuniæ singulorum: Et *toties* operatio Regulæ aureæ exercetor, *quot* fuerint ii, qui societatem inierunt.

EXEMPLA.

I. Mercatores tres lucrati sunt 7000 ℔. Eorum primus contribuit 120. *Secundus* 200. *Tertius* 240. *quæritur quantum unicuique cedat de lucro, secundum proportionem contributi argenti? Hic primo omnium omnis mercatorum pecunia collecta in summam facit* 560. *Dehinc ita stat*

℔ ℔

560—*dant*—7000 *quid* { 120 — 200 *F* — 240 } { 1500 — 2500 — 3000 }

Hic Regula repetenda est ter; *quia tres sunt mercatores; quo facto cognoscitur cujusque lucrum.*

II. Mercatores tres mercibus suis repleverunt navim. Navis passa est naufragium, & ejectum ex communibus mercibus, quantum

adæquat pretiū 100 aureorum. Porro primus mercator habuit in navi aureos 150. Secundus 500. Tertius 700. Quæritur quanta sit cujusq; jactura & damnum, habita argenti proportione? Collige pecunias in unā summam, sunt 1350. Jam dic 1350 aurei passi sunt jacturam 100 aur: quantum passi sunt 150 aurei? Proveniet damnum mercatoris primi. Item 1350 dant damnum 100, quid 500? habebitur damnum secundi atque ita alterius.

1350 —— 100 { 150 / 500 *fac.* / 700 —— } { 11 $\frac{150}{1350}$ *vel* $\frac{1}{9}$ / 37 $\frac{150}{1350}$ *vel* $\frac{1}{27}$ / 51 $\frac{1150}{1350}$ *vel* $\frac{23}{27}$ }

III. Quatuor *bonarum literarum studiosi peregrinationis ergò iter instituturi, conferunt in commune quilibet certam aureorū summam A 72. B 64. C. 56. D. 48. Eos nummos uni servandos & ferendos tradunt: cui per infortunium furto surripiuntur aurei 120. Quæritur quantum singuli perdant?*

240 *dant* — 120 — *quid* { A 72 —— 36 / B 64 —— 32 / *facit* / C 56 —— 28 / D 48 —— 24 }

3. RE-

3. REGULA CONSORTII
cum Tempore.

Altera Regulæ Consortii varietas, præter fœnus aut jacturam, adjunctum quoque habet tempus, aut alias circumstantias: lubrigȝ proportio æquatur *proportioni temporis* & *pecuniæ*. Hîc *pauca* hæc observanda. 1. Multiplicantur singuli annorum numeri per proprios & adjunctos menses, vel aliam comitem circumstantiam; Producta serventur seorsim. 2. Ea producta addantur. 3. Hoc aggregatum ponatur loco *primo*: *Secundo*, lucrum aut damnum, aut alia circumstantia quæstionis: *tertio*, unumquodque seorsim productum *per Reg.* 1, inventum. Et operare ut moris est.

EXEMPLA.

1. Mercatores tres *facta societate emundo & vendundo lucrantur aureos 100.* Primus *contulit in commune 35, eosque locavit negotiationi per 3 menses*: Secundus 50 *per bimestre*. Tertius *60 per mensem. Quæritur quantum cedat cuiq; de lucro.* Initio *multi-*

plica aureos 35 per suos menses 3, fiunt 105; item aureos 50, per suos menses 2, fiunt 100; item aureos 60 per mensem 1, manent 60. Qui tres numeri collecti faciunt 265. Jam ita age:

265 *dant* — 100 — *quid* { 105 — 39 $\frac{165}{265}$; 160 *fac.* 37 $\frac{195}{265}$; 60 — 22 $\frac{170}{265}$ }

II. Conduxerunt laniones tres, pascua pro 62 argenti unciis annuatim. In iis A pavit 20 boves per 8 hebdomadas: B 48 per 21. C 27 per 16. Quæritur quantum cuiq; sit solvendum de precio 62 thalerorum, habita ratione temporis & armentorum pastorum. Multiplicata singulorum armenta in suos dies ita habent,

A 360. B 1008. C 432.

Hæc in unam summam collecta fac. 1800. Jam sic colloca.

1800 — *dant* — 62 *quid* { 360 — 12 $\frac{720}{1800}$; 1008 *fac.* 34 $\frac{1296}{1800}$; 432 — 14 $\frac{1584}{1800}$ }

COROLLAR.

Probatio hujus regulæ facilis est: Adde producta omnia invicem: quæ si exactè repræsentent datum precium, operatio

tio bene fuit & absque errore expedita. *Ut in ultimo exemplo datum pretium est 62. thal. Producti numeri sunt 12. 34. 14. qui additi faciunt 60. Minutiæ verò adhærentes additæ sunt, $\frac{1600}{1800}$ id est per Propos. 3. lib. 3. duo integra; eoque summa 62. Consimile periculum facies in omnibus adductis exemplis.*

PROP. XI.

Invenire proportionem Numerorum alligandorum; quæ hodiè dicitur Regula Alligationis.

REgulam *Alligationis* vocant Arithmetici eam, in qua numerus unus ad alium alligatur: *Duo* in ea dantur *numeri*, alius *alligandus*, alius *ad quem fit alligatio*, *ut si œnopola habeat vina duûm generum, aliud vile, aliud nobile, de viliori vendat mensuram 6 assibus, de generoso 13 assibus; gestiat verò commiscere utrumque, ita ut mensura commixti cramatis veneat 8 ß, quæraturque quantum de utroque sit sumendum. Inibi 6 & 13 sunt numeri alligandi. At 8, numerus ad quem fit alligatio. Præcepta*

Regulæ aliæ sunt. 1. Numeros alligandos, seu duo fuerint, seu tres aut plures, dispone ordine, ductis subtus lineis duabus. 2. Inter has lineas colloca numerum alligandum. 3. Investiga differentias inter alligandos & alligatum: ubi duplici observatione opus est: vel enim duo sunt numeri dati, vel plures. *Si duo*, differentias ordine permutato subscribe suis numeris: majorem minori, minorem majori. *Si plures*; notabis probe quis sit maximus inter alligandos numerus: Ei subscribes omnes differentias inter alligandos, & alligatum: singulis verò alligandis reliquis seorsim subscribes differentiam inter alligandum maximum & alligatum. 4. Differentias omnes invicem adde. 5. Per Regulam auream operare hac ratione; ut primo loco ponas aggregatum differentiarum per Reg. 4. inventum: Secundo, ipsas differentias separatim positas: Tertio, unitatem: Et expedita legitima operatione, innotescet quod quærebatur.

EXEMPLA.

I. Retineamus exemplum jam positum.

Octo-

Oenopola duos habet vinicados, alterum tenuioris: alterum generosioris: Mensuræ unius precium de tenuiori est, 6 ß: de generoso 13 ß: Tenue ægrè venditur: Itaque ex re sua putat esse utrumque commiscere, ut alterius bonitati, alterius imbecillitati succurrat: Eâ verò lege contemperare cupit, ut Mixturæ mensura veneat 8 ß: Quæritur quantum sumi oporteat de utroque: Ponantur alligandi loco superiori: alligatus inferiori, interpositâ inter utrosque virgula: Ductâ

6	13	N. alligand.
	8	N. alligat.
5	2	Diffe.

adhuc aliâ virgula, investigentur differentia inter utrosque; quæ sunt 2 & 5: (6 enim ab 8 differunt per 2: Et 13 ab 8 per 5:) sed, quod bene notandum, permutatim hæ sunt scribendæ, & per crucem, juxta Regulæ 3 priorem varietatem, siquidem duo solùm sunt alligandi: Hæ differentiæ additæ faciunt 7. Unde Regula aurea talis.

7 — dant { 5, 2 } quid dat 1. Fac. { 5/7, 2/7 }

 Im-

Itaque de vino viliori sumenda $\frac{5}{7}$ *unius mensuræ; de meliori* $\frac{2}{7}$, *quæ conjunctæ faciunt unam integram mensuram, precio 8 ß.* *Nam* (ut videas rationem & fundamenta operationis) *Quia 1 mensura vilioris valet 6 ß, per Reg. auream valebunt* $\frac{5}{7}$ *unius mensuræ,* $4\frac{2}{7}$ *ß: Item quia 1 mensura generosioris valet 13 ß valebunt* $\frac{2}{7}$ *unius mensuræ* $3\frac{5}{7}$ *ß: At* $3\frac{5}{7}$ *&* $4\frac{2}{7}$ *ß additi faciunt integros, 8 ß*

II. Aurifaber habet tres massas argenti diversæ bonitatis & valoris: prima A semuncia valet 32 ß. Secunda B 24 ß. Tertia C 16 ß. Has ita commiscere cupit ut possit semunciam vendere 28 ß. Quæritur quantum de quâq; massa sit sumendum?

Disponantur numeri per Regul. 1 & 2 quia hîc tres sunt alligandi, iccirco per Regula 3. secundam

32	24	16	alligandi
	28		alligatus
4	4	4	Differen.
12			

observationem, oculos & animum intendo in Maximum, scilicet 32 cui subscribo differentias duorum reliquorum, quæ sunt 4 & 12: (nam inter 24 & 28 sunt 4. Et inter 16 & 28 sunt

sunt 12) Ipsis porro duobus reliquis singulis, subscribo differentiam inter maximum alligandum (32) & alligatum (28) quæ est 4: Omnes hæ differentiæ in unam summam collectæ sunt 24. Hinc imago.

24 *dant*	16 (*nã* 12 & 4 *sunt* 16)	*quid dat* 1 *fac.*	$\frac{16}{24}$ *id est* $\frac{2}{3}$
	4		$\frac{4}{24}$ *id est* $\frac{1}{6}$
	4		$\frac{4}{24}$ *id est* $\frac{1}{6}$

Itaq; de massa A sumet aurifex $\frac{2}{3}$ *semunciæ. De massa B & C* $\frac{1}{6}$ *Ratio operationis hæc est: Pro A. 1 semuncia valet 32 ß. Ergò per Reg. aureã,* $\frac{2}{3}$ *valent 21* $\frac{1}{3}$ *ß. Pro B. 1 semuncia valet 24: Ergò* $\frac{1}{6}$ *valebit 4 ß, Pro C. 1 semuncia valet 16: Ergò* $\frac{1}{6}$ *valebit 2* $\frac{2}{3}$ *ß. Jam collige in unam summam 21 ß. 4 ß. 2 ß: Itemque fractiones adhærentes* $\frac{1}{3}\frac{2}{3}$ *sunt* $\frac{3}{3}$*, id est, integrum: Proinde tota summa 28 ß.*

PROPOS. XII.

Ex falsis positionibus invenire numerum verum quæsitum, quæ dicitur Regula Falsi.

1. *Unde dicta Regula Falsi.*
2. *Origo ejus & prima inventio.*

I.

Pulcherrima est *Regula* ea, quam Arithmetici *vel Falsi* nominant, non quod vel proponat vel doceat ea, quæ vera non sunt; sed quod ex positis quibusdam incertis, quasique falsis numeris, ingeniosè & eleganter eruat numerum, qui quærebatur.

2. Existimant nonnulli, initio fortuitam fuisse ejus inventionem. Investigatorem enim, dum in rei quæsitæ indagine versaretur, & varias pertentaret vias, quibus ad propositæ quæstionis dissolutionem perveniret, in hanc nulla demonstratione ductum incidisse; non aliter quam apud Logicos, ex falsis per accidens dedu-

deducitur verum. Elegantiores postmodum Mathematici, veram & infallibilem illius rationem dederunt, probarumque non casum in Mathematicis, sed demonstrationem regnare.

3. Hujus Regulæ *processum* obscurum & difficilem reddiderunt plærique. Nos eum, quam fieri potest, *faciemus planissimum.* Sæpiùs offertur quæstio difficiliores nodos habens, quam ut per propositiones præcedentes solvi queat. In eâ utplurimùm quæritur, *numerus ignotus.* Sed quæritur *per ambages* & mira diverticula. *Generalis Regula* hæc est. Assumitur poniturque pro numero quæsito falsa hypothesis, falsusque numerus, qui tantisper augetur, minuitur, dividitur, multiplicatur, quoad omnes circumstantiæ in Quæstione fuerint examinatæ atque expensæ, ita uti jubet Quæstionis propositæ tenor.

4. Illud verò ipsum vel *unâ falsa hypothesi* efficitur, vel *duabus*. Unde Regula Falsi *duplex*. Alia *unius positionis*: alia *duarum*.

5. Pri-

5. *Prior*, non quidem præceptis multis, sed *exemplis* est contenta doceri.

Regula falsi, unius propositionis.

EXEMPLA.

6. *Cum aliquando in Macedonum colloquio mentio de ætatibus incidisset, Ego, inquit, Alexander, Ephestionem meum duobus annis antecedo. At Clytus: vestros duorum annos & præterea quatuor attigi. Tum verò Callisthenes: Ineunda est mihi O Rex, inquit, ista hæc ætatum commemoratio. Patris enim memoriam renovavit, qui cum annos 96 vixisset, trium vestrum ætates compleverat: quæritur quot annos habuerit Ephestion, & quot Alexander, quot Clytus? Hic hypotheseos loco assumo numerum aliquem falsum, pro arbitratu. Pono ætatem Alexandri fuisse Anni 18. Habuit ergò Ephestion annos 16, ex tenore datæ historiæ & quæstionis: Clytus verò 38 (nam 18 & 16, & præterea 4 faciunt 38.) Hi anni omnes collecti faciunt 72. Debebant verò facere 96 ex pronunciato Callistenis. Sic ergò ago per Regulam auream: 72 proveniunt ex 18 hypothesi falsa pro Alexandri ætate, ex quo numero proveniunt 96?*

72-18

72 - 18 - 96 - *fac.* 24.
multiplicaverim 96 per secundum (18) proveniunt 1728: quæ divide per primum (72) habebis 24. Ætas igitur Alexandri fuit 24. Ephestionis 22: utriusque ætatem Clytus excessit 4 annis: utriusque ætas est 46: quibus additis 4 faciunt 50, quæ est ætas Clyti. Hi anni omnes collecti faciunt 96.

Regula falsi duarum positionum.

7. Ea *his* absolvitur *præceptis*. I. Assumantur seorsim numeri duo ad placitum parvi aut magni, & uterque sigillatim examinetur ad Exempli propositi pronunciatum, ut constet, quantum uterque fallat, quo minus proveniat id, quod quæritur. 2. Observetur differentia fallens, utrum *plus* sit an *minus* eo quod quæritur. 3. Si utrobiq; reperiatur Plus, vel utrobique Minus; subtrahantur: si partim plus, partim minus, addantur differentiæ fallentes. 4. Multiplicentur per crucem numeri positi utriusque falsitatis. 5. Productum unum addatur aut subtrahatur alteri, prout vel Plus vel Minus fuerit inventum

tum in Reg. Tert. 6. Numeri relicti dividantur, & proveniet quæsitum.

EXEMPLA.

§. I. *Asina & Mula gestabant utres vino impletos. Asina sub onere gemens, non poterat gradum ferre porrò. Ad eam Mula, mater, inquit, quid quereris? Ego quidem si unam de meis tibi mensuram addidero, æqua ambæ feremus onera. Sed illud nolim, Tu potius de tuis mihi trade unam; Egoque portabo oneris tui duplum. Quæritur quot mensuras asina, quot mula gestaverit? Hîc assumo ὑποθετικῶς numerum aliquem pro Mula vel asina; etiam falsum, etiam incertum; Cumque eo ita procedo, uti proposita quæstio jubet. Placet ponere mensuras pro Mula 6. quibus si 1 demas manent 5. Et si asinæ 1 addas, & ipsa debet habere 5. Habuit ergò 4. Nunc si de mensuris 4 asinæ, unam addas mensuris 6 mulæ, retinebit asina 3, mula accipiet 7. At verò debebat mula portare duplum oneris Asinæ: Septem verò non sunt duplum de 3, sed 1. amplius: Igitur assumptus est numerus falsus unitate in excessu differens à vero. Hæc differentia notata servetur, ascribaturque numero falso posito, additis* litte-

literis P, quæ indicat plus sumtum, quam oportebat.

1 Positio Differentia.

6 ———— 1 P.

Ad eandem modum etiam secunda vice assumo, & suppono alium numerum seu majorem priori hypothesi 6, seu minorem. Lubet adhuc sumere majorem, scilicet mulam gestasse mensuras 11. Det mula de his unam asinæ, retinebit 10. Si jam asina post acceptum 1 & ipsa habet 10, utique ante habuit 9. Det unam ipsis 11 mulæ; retinebit asina 8, mula 12. Ad 12 non sunt duplum (debebant autem esse) de 8, sive 16: itaque desunt adhuc 4. Hinc collige etiam hanc hypothesin falsam fuisse, esseque peccatum in defectu per 4. Etiam hæc seorsim notentur, adscriptis literis M, quæ significat minus justo sumptum.

2 Positio Different.

11 ———— 4 M.

His expeditis, multiplico primam Positionem in differentiam secundam; & secundam hypothesin in differentiam primam; seu quod idem; quatuor hos numeros decussatim aut per crucem multiplico, hac ratione.

Pos.

	Pos.		Diff.	
Imposterum addo 24 & 11,	6		1	P
sunt 35: *addo*	11		4	M.
etiam differentias (1 & 4) *fi-*	24		11	

unt 5. *Postremò divido* 35 *per* 5 *proveniunt* 7. *Atque hic est ipse numerus quæsitus, per duas falsas positiones inventus. Scilicet, Mula gestavit mensuras* 7, *de quibus si unam daret asinæ, ipsa retineret sex, & asina itidem sex: asina ergò ante gestavit* 5. *Ex iis* 5 *si unam traderet Mulæ, ipsa asina retineret* 4, & *mula* 8, *quæ sunt duplum de* 4.

9. Vides rem esse satis facilem, si ad ipsam Quæstionis indolem animum probè advertas. Hoc imprimis, quod in præcepto monui, notabis: *Si utraque differentia fuerit ejusdē appellationis*, id est, *utraque Minus, vel utraque Plus*, tum post factam multiplicationem per crucem, minorem numerum auferri debere à majori, item minorem differentiam à majori: & tum instituendam divisionem. At si appellationes fuerint *diversæ*, id est, si differentia altera fuerit *Minus, altera Plus*; tum post

factam

factam multiplicationem, addendum esse majorem minori: itemq; seorsim addendas differentias inter se; & sic absolvendā divisionem, quemadmodum in Exemplo mulæ & asinæ factum vides.

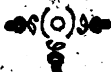
10. II. Addam exemplum, ubi *differentia utraque est ejusdem denominationis. Juvenis quidam ingressus Gynecæum, Salvete, inquit, vos 90 lepidæ puellæ. Respondet inter illas una. Non equidem 90 sumus, sed si, quot nostrūm sunt, totidem adhuc adessent, & insuper pars dimidia, itemq; pars tertia, nec non pars sexta, tum demum essemus numero 90. Quæritur quotnam fuerint in Gynecæo puellæ? Lubet primum conjectari fuisse 18. His adde totidem, id est 18. Et dimidium 9: Et partem tertiam 6: Et partem sextam 3 Quæ omnia addita faciunt 54. At debebant facere 90. Differentia ex 36. Tantum erratum est, & justo Minus assumptum. Est igitur prima Hypothesis 18: Diff. vel error 36. Pergo, & altera vice fingo fuisse 24. addo totidem seu 24, & dimidiam 12, & tertiam 8 & sextam 4. Summa est 72. At debebat esse 90. Ergò & hîc assumpta falsa hypothesis: Diff.*

18, Mi-

18, *Minus quam par ſenſ. Nunc porrò multiplico decuſſatim.*

Poſitio:		Diff.	Subtract.
18	✕	36 M	8 6 4
24		18 M	3 2 4
324		864	5 4 0
			3 6
			1 8
			1 8

Quia hîc appellationes ſunt eadem, auferuntur minores à majoribus: manent ex Multiplicatis 540, *ex differentiis* 18. *Hæc invicem dividantur, proveniunt* 30. *Ajo itaq; fuiſſe in Gynecæo puellas* 30, *quibus ſi addideris totidem, id eſt* 30: *& dimidium* 15. *& tertiam* 10, *& ſextam* 5, *ſunt univerſim* 90.



P. LAU-

P. LAUREMBERGI.
INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM PARS PROPRIA.

LIBER IV.

DE ALGEBRA, VEL NUMERIS COSSICIS.

PROP. I.

Numerorum Coßicorum cognitio.

1. *Excellentia Algebræ.*
2. *Appellationes ejus variæ.*
3. *Difficultas.*
4. *Numeri Algebraici.*
5. *Radix.*
6. *Zensus vel quadratum.*
7. *Cubus.*
8. *Zensizensus.*
9. *Nota Plus & Minus.*

I. Com-

I.



COmmuni Arithmeticæ *parti* subjungimus jam *Propriam*, quæ occupatur explicandis duabus Numerorum quasi *speciebus*, *Cosßicis* & *Astronomicis*. *Cossica* illa est scientia & olim & hodiè toto orbe famosißima, quæ ob subtilitatem & acumen, totam numerandi perfectionē sola complectitur, complicans omnium Regularū Arithmeticæ exempla, viresq; singularum universas superans. De eâ sic eleganter *Cardanus lib. de Proposit.* *Cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem, ars hæc superet, donum profectò cœleste est, & experimentum virtutis animorum adeò illustre, ut qui hæc intellexerit, nihil non intelligere posse se credat.*

2. Vocata est hæc Arithmeticæ portio seu potius Regina, ab Arabibus *Algebra*, quam voculam etiam Latini, & nos Germani retinemus. Parum interest, derivamne dicas à restituendo (quod sonat vox Arabica) an à *Gebro* ejusdem inventore, Mathematico Arabe excellenti, qui

cam

eam Syriacâ linguâ conscriptam Alexandro Magno obtulit, cujus codex maximâ reverentiâ etiamnum hodiè dicitur asservari apud Indos harum subtilitatum studiosissimos. *Itali* vocant *Regulam Cossicam*, à vocabulo *Cosa*, quod *Rem* illis significat, quia loco ejus quod ignotum est & quæritur, assumitur *Res*, vel *Radix*, ut paulò pôst docebo.

3. Totam scientiam ego contraham in *breve compendium*; eôque facto inserviviam commodis Adolescentum, ea inclusurus paucis præceptis, quæ ad ipsissima fundamenta attinent: quibus adjuti (nisi quis nimis fuerit ab ingenio inops) poterunt etiam quæ abstrusiora sunt & difficiliora, suopte ingenio assequi. Spero verò eâ methodo & facilitate me hîc usurum, ut non dubitem plures imposterum futuros Algebræ studiosos, quam fuere hactenus. Quis enim se non passus est deterrer indicibili illâ obscuritate, quâ multi suos libellos Algebraicos datâ operâ collutularunt?

4. Sed ad rem & ad propositum. *Nu-*

5. *Prior*, non quidem præceptis multis, sed *exemplis* est contenta doceri.

Regula falsi, unius propositionis.

EXEMPLA.

6. *Cum aliquando in Macedonum colloquio mentio de ætatibus incidisset, Ego, inquit, Alexander, Ephestionem meum duobus annis antecedo. At Clytus: vestros duorum annos & præterea quatuor attingo. Tum verò Callisthenes: Iucunda est mihi O Rex, inquit, istbæc ætatum commemoratio. Patris enim memoriam renovavit, qui cum annos 96 vixisset, trium vestrum ætates compleverat: quæritur quot annos habuerit Ephestion? & quot Alexander, quot Clytus? Hic hypotheseos loco assumo numerum aliquem falsum, pro arbitratu. Pono ætatem Alexandri fuisse Anni 18. Habuit ergò Ephestion annos 16, ex tenore datæ historiæ & quæstionis: Clytus verò 38 (nam 18 & 16, & præterea 4 faciunt 38.) Hi anni omnes collecti faciunt 72. Debebant verò facere 96 ex pronunciato Callistenis. Sic ergò ago per Regulam auream: 72 proveniunt ex 18 hypothesi falsa pro Alexandri ætate, ex quo numero proveniunt 96?*

72 -- 18 -- 96 -- *fac.* 24.

multiplicaverim 96 per secundum (18) proveniunt 1728: quæ divide per primum (72) habebis 24. Ætas igitur Alexandri fuit 24. Ephestionis 22: utriusque ætatem Clytus excessit 4 annis: utriusque ætas est 46: quibus additi 4 faciunt 50, quæ est ætas Clyti. Hi anni omnes collecti faciunt 96.

Regula falsi duarum positionum.

7. Ea *his* absolvitur *præceptis*. 1. Assumantur seorsim numeri duo ad placitum parvi aut magni, & uterque sigillatim examinetur ad Exempli propositi pronunciatum, ut constet, quantum uterque fallat, quo minus proveniat id, quod quæritur. 2. Observetur differentia fallens, utrum *plus* sit an *minus* eo quod quæritur. 3. Si utrobique reperiatur Plus, vel utrobique Minus; subtrahantur: si partim plus, partim minus, addantur differentiæ fallentes. 4. Multiplicentur per crucem numeri positi utriusque falsitatis. 5. Productum unum addatur aut subtrahatur alteri, prout vel Plus vel Minus fuerit inventum

tum in Reg. Tert. 6. Numeri relicti dividantur, & proveniet quæsitum.

EXEMPLA.

8. I. *Asina & Mula gestabant utres vino impletos. Asina sub onere gemens, non potuit gradum ferre porrò. Ad eam Mula, mater, inquit, quid querularis? Ego quidem si unam de meis tibi mensuram addidero, æqua ambæ feremus onera. Sed illud nolim, Tu potius de tuis mihi trade unam; Egoque portabo oneris tui duplum. Quæritur quot mensuras asina, quot mula gestaverit? Hîc assumo* ὑποθετικῶς *numerum aliquem pro Mula vel asina; etiam falsum, etiam incertum; Cumque eo ita procedo, uti proposita quæstio jubet. Placet ponere mensuras pro Mula 6. quibus si 1 demas manent 5. Et si asinæ 1 addas, & ipsa debet habere 5. Habuit ergò 4. Nunc si de mensuris 4 asinæ, unam addas mensuris 6 mulæ, retinebit asina 3, mula accipiet 7. At verò debebat mula portare duplum oneris Asinæ: Septem verò non sunt duplum de 3, sed 1 amplius: Igitur assumptus est numerus falsus unitate in excessu differens à vero. Hæc differentia notata servetur, ascribaturque numero falso posito, addita*

litte-

literam P, qua indicat plus sumtum, quam oportebat.

1 Positio Differentia.

6 ———— 1 P.

Ad eandem modum etiam secunda vice affirmo, & suppono alium numerum seu majorem priori hypothesi 6, seu minorem. Lubet adhuc sumere majorem, scilicet mulam gestasse mensuras 11. Det mula de his unam asinæ, retinebit 10. Si jam asina post acceptam 1 & ipsa habet 10, utique ante habuit 9. Det unam ipsis 11 mulæ; retinebit asina 8, mula 12. Ad 12 non sunt duplum (debebant autem esse) de 8, sed 16: imque desunt adhuc 4. Hinc colligo etiam hanc hypothesin falsam fuisse, esseq; peccatum in defectu per 4. Etiam hac seorsim notentur, adscripta litera M, qua significat minus justo sumptum.

2 Positio Different.

11 ———— 4 M.

His expeditis, multiplico primam Positionem in differentiam secundam; & secundam hypothesin in differentiam primam; seu quod idem; quatuor hos numeros decussatim aut per crucem multiplico, hac ratione.

Pos.

	Pos.		Diff.	
Imposterum addo 24 & 11, fiunt 35: addo etiam differentias (1 & 4) fiunt 5.	6		1	P
	11		4	M.
	24		11	

Postremo divido 35 per 5 proveniunt 7. Atque hic est ipse numerus quæsitus, per duas falsas positiones inventus. Scilicet, Mula gestavit mensuras 7, de quibus si unam daret asinæ, ipsa retineret sex, & asina itidem sex: asina ergo antè gestavit 5. Ex iis 5 si unam traderet Mulæ, ipsa asina retineret 4, & mula 8, quæ sunt duplum de 4.

9. Vides rem esse satis facilem, si ad ipsam Quæstionis indolem animum probè advertas. Hoc imprimis, quod in præcepto monui, notabis: Si utraque differentia fuerit ejusdẽ appellationis, id est, *utraque Minus*, vel *utraque Plus*, tum post factam multiplicationem per crucem, minorem numerum auferri debere à majori, item minorẽ differentiam à majori: & tum instituendam divisionem. At si appellationes fuerint *diversæ*, id est, si differentia *altera* fuerit *Minus*, *altera Plus*, tum post factam

factam multiplicationem, addendum esse majorem minori: itemq; seorsim addendas differentias inter se; & sic absolvendã divisionem, quemadmodum in Exemplo mulæ & asinæ factum vides.

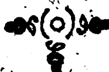
10. II. Addam exemplum, ubi *differentia utraque est ejusdem denominationis. Juvenis quidam ingressus Gynecæum, Salvete, inquit, vos 90 lepida puellæ. Respondet inter illas una. Non equidem 90 sumus, sed si, quot nostrũm sunt, totidem adhuc adessent, & insuper pars dimidia, itemq; pars tertia, nec non pars sexta, tum demum essemus numero 90. Quæritur quotnam fuerint in Gynecæo puellæ? Lubet primum conjectari fuisse 18. His adde totidem, id est 18. Et dimidium 9: Et partem tertiam 6: Et partem sextam 3 Quæ omnia addita faciunt 54. Ad debebant facere 90. Differentia ex 36. Tantum erratum est, & justo Minus assumptum. Est igitur prima Hypothesis 18: Diff. vel error 36. Pergo, & altera vice fingo fuisse 24. addo totidem seu 24, & dimidiam 12, & tertiam 8 & sextam 4. Summa est 72. At debebat esse 90. Ergò & hic assumpta falsa hypothesis: Diff.*

18, Mi-

18, *Minus quam par sunt. Nunc porrò multiplico decussatim.*

Positio:		Diff.	Subtract.
18	✕	36 M	8 6 4
24		18 M	3 2 4
324		864	5 4 0
			3 6
			1 8
			1 8

Quia hîc appellationes sunt eadem, auferuntur minores à majoribus: manent ex Multiplicatis 540, *ex differentiis* 18. *Hae invicem dividantur, proveniunt* 30. *Ajo itaque fuisse in Gynecaeo puellas* 30, *quibus si addideris totidem, id est* 30: *& dimidium* 15. *& tertiam* 10, *& sextam* 5, *fiunt universim* 90.



P. LAU-

P. LAUREMBERGI. INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM PARS PROPRIA.

LIBER. IV.

DE ALGEBRA, VEL NUMERIS COSSICIS.

PROP. I.

Numerorum Coßicorum cognitio.

1. *Excellentia Algebræ.*
2. *Appellationes ejus variæ.*
3. *Difficultas.*
4. *Numeri Algebraici.*
5. *Radix.*
6. *Zensus vel quadratum.*
7. *Cubus.*
8. *Zensizensus.*
9. *Notæ Plus & Minus.*

I. Com-

I.



Communi Arithmeticæ parti subjungimus jam Propriam, quæ occupatur explicandis duabus Numerorum quasi *speciebus*, *Cosßicis*, & *Astronomicis*. *Cossica* illa est scientia & olim & hodiè toto orbe famosissima, quæ ob subtilitatem & acumen, totam numerandi perfectionē sola complectitur, complicans omnium Regularū Arithmeticæ exempla, viresq; singularum universas superans. De eâ sic eleganter *Cardanus lib. de Proposit. Cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem, ars hæc superet, donum profectò cœleste est, & experimentum virtutis animorum adeò illustre, ut qui hæc intellexerit, nihil non intelligere posse se credat.*

2. Vocata est hæc Arithmeticæ portio seu potius Regina, ab Arabibus *Algebra*, quam voculam etiam Latini, & nos Germani retinemus. Parum interest, derivatam ne dicas à restituendo) quod sonat vox Arabica) an à *Gebro* ejusdem inventore, Mathematico Arabe excellenti, qui eam

eam Syriacâ linguâ conſcriptam Alexandro Magno obtulit, cujus codex maxima reverentia etiamnum hodiè dicitur aſſervari apud Indos, harum ſubtilitatum ſtudioſiſſimos. *Itali* vocant *Regulam Coſſicam*, à vocabulo *Coſa*, quod *Rem* illis ſignificat, quia loco ejus quod ignotum eſt & quæritur, aſſumitur *Res*, vel *Radix*, ut paulò pôſt docebo.

3. Totam ſcientiam ego contraham in *breve compendium*; eôque facto inſerviam commodis Adoleſcentum, ea incluſurus paucis præceptis, quæ ad ipſiſſima fundamenta attinent: quibus adjuti (niſi quis nimis fuerit ab ingenio inops) poterunt etiam quæ abſtruſiora ſunt & difficiliora, ſuopte ingenio aſſequi. Spero verò eâ methodo & facilitate me hîc uſurum, ut non dubitem plures impoſterum futuros Algebræ ſtudioſos, quam fuere hactenus. Quis enim ſe non paſſus eſt deterrere indicibili illâ obſcuritate, quâ multi ſuos libellos Algebraicos datâ operâ collutularunt?

4. Sed ad rem & ad propoſitum. *Numeri*,

meri, quorum in Algebra usus est, quamquam iidem sint, quos explicuimus hactenus, aliqui tamen eorum etiam *proprios habent titulos & appellationes*

5. (1.) Quilibet numerus simplex, seu integer, seu fractus, seu fictus seu non fictus, dicitur *Radix*, vel *Res* & pingitur hoc charactere ℞ vel √ *ut 2 √ duæ radices: 8 √ octo radices.*

6. (2.) Radix in se multiplicata producit *Quadratum* vel *Zensum*, secundum scilicet numerũ Cossicum, cujus hic character q. vel ʒ: ut 4 ʒ *quatuor censi vel quadrata. 3 √ 9 ʒ tres radices, novem quadrata.*

7. (3.) Si Radix multiplicetur in Zensum seu quadratum, nascitur tertius numeru Cossicus, *Cubus* dictus, cujus talis nota c℞ *ut 8 c℞, octo cubi. 4 √ 16 ʒ 64 c℞ quatuor radices, sexdecim quadrata, 64 cubi.*

8. (4.) Cum eadem radix multiplicatur in cubum, nascitur *quadrati—quadratum vel Zensi—Zensus*, cujus nota ʒʒ vel 6q quasi biquadratum, quia provenit ex multiplicatione Quadrati in seipsum, vel radicis in Cubum; *ut 2 √ 4 ʒ 8 c℞ 16 ʒʒ. id est, dua*

duæ radices, *4 quadrata*, *8 cubi*, *16 biquadratum*. Atque ita ulterius. Satis est tyronibus hæc novisse: Cum vix ultra Radicem & Quadratum ascendamus.

9. Præterea usus quoque hîc est *duarum notarum*, +&—: quorum ista, +, significat *Plus*: Hæc — *Minus*: ut 4 √ 16 ℥ + 8. *id est*, 4 *radices*, 16 *quadrata*, *plus octo*. 3 √ 9 ℥—4. *Tres radices*; 9 *quadrata*, *Minus quatuor*. Ubi observabis quoties hæ duæ notæ adjunctæ sunt numeris nullo charactere Cosico præditis (qui scilicet non habent ascriptum signum √, *vel* ℥ *vel* c℞) toties eos esse *vulgares*.

PROPOS. II.

Operationum Algebraicarum fundamenta cognoscere.

1. Operationum Algebraicarum basis & (nervus.
2. Æquatio & Reductio.

SOlent quidem Algebraistæ operationibus Cossicis præmittere *Additionem*, *Subt. Mult. Divis.* numerorum Cossicorum, tam integrorum quam fractorum, Radicum scilicet, Quadratorum, Cuborum, &c. & copiosis præceptis terere pe-

tiorem disciplinæ partem, sed *nos benè ijs carere possumus*, cum, quanta ad nostrum attinet institutum cognitio, eam præcedentium Librorum præcepta abundè suppeditent. Sicubi *peculiaribus observationibus* opus erit, eas in ipso discursu intermiscebimus.

1. Totum Algebræ negotium *consistit in eruendâ Quæstione, & pervestigando numero ignoto.* Quemadm. in Regula Falsi, Falsus ponitur numerus, ex quo postmodum juxta Quæstionis tenorem eruitur alius numerus falsus; & beneficio hujus falsi tandem verus: Ita in Algebra, quum Quæstio difficillima solvenda offertur, semper ponitur & assumitur loco hypotheseos, 1 ✓, vel *radix* aut *res* una: & postmodum addendo vel minuendo, multiplicando vel dividendo proceditur donec tandem inveniatur unus aliquis numerus, proportione respondens ignoto illi, qui quæritur.

2. At vero, quia revera non est idem ipse ignotus qui quæritur, sed illi solum similis aut proportione æqualis, idcirco insititu-

stituenda est *Æquatio* & *Reductio*, ut scilicet revera æqualis, imò idē fiat cū eo, quū quæritur. Præcipuus igitur labor Cossicus consistit *in Æquatione* & *Reductione*. Dabo facile Exemplum: *Inter studiosos aliquot deambulantes Quæstio incidit de summâ pecuniæ, quam quisque secum ferret. Archias inquit: Mihi octo sunt asses plus quàm huic* Sempronio. Titus *verò, Vestram, ait, amborum summam & prætereà quatuor asses habeo.* Tum Alexander; *Ego verò, inquit, solus centum fero asses, summam omnibus vestris æqualem. Quæritur quot asses fuerint Sempronio, Archiæ, Tito, Alexandro: solutionem dabit Algebra. Hîc primò omnium summa Sempronii (quæ fuit omnium minima) pono fuisse 1* ✓ *id est radicem vel rem unam. Igitur summa Archiæ fuit 1* ✓ + *8, id est, una res & plus vel insuper octo: nam hujus summa illius summam excessit 8 assibus. Titi verò summa erit, 2* ✓ + *12, id est, duæ* ℞, *plus 12: nam utraque summa prior conjuncta est 2* ✓ + *8, quas possedit Titus, & insuper 4: fiunt ergò 2* ✓ + *12. Jam hæ tres summæ simul collectæ faciunt 4* ✓ + *20,*

1 √
1 √ + 8
2 √ + 1 2

4 √ + 2 0

id est, quatuor Radices plus 20, quæ æquales sunt 100 assibus, illi scilicet summæ quam Alexander possidebat. Hoc primum est. Nunc porrò ut distinctè & reipsa sciam, quot asses faciat 1 √, vel una radix, pro Sempronii summâ posita, oportet me Reductionem & æquationem instituere, quæ sunt ut dixi, Crura ipsa, quibus Algebra ambulat. Innituntur verò cognitissimis illis axiomatibus, *in vestibulo libri à nobis recensitis*, Æqualia æqualibus addita, vel subtracta, vel multiplicata &c. producunt æqualia. *Ut ruditer ostendam rem: Constitue hinc & hinc duos illos numeros,*

4 √ + 20 ET 100

qui inter se sunt æquales: Ab his æqualibus aufero æqualia: aufero, inquam, 20 (quæ + plus sunt) ab 4 √ + 20, remanent 4 √: Eadem 20 aufero à 100, supersunt 80. Itaq; 4 √ manent æquales 80 per axiom. 6. quia æqualis nume-

numerus ab utrieq; ablatus est. Jam si 4 J aquales sunt 80, erunt 2 J aquales 40, & 1 J aequalis 20: vel per Regulam auream, 4 dant 80, quid 1? F. 20. Quapropter quia pro summa Semproni posita est 1 J fuit ea ipsa summa 20 assium: Et ob id summa Archia 28 ass: Summa Titi 52 ass. (quia 20 & 28. & praterea 4 faciunt 52) qua omnes

2	0
2	8
5	2
1 0	0

summa addita faciunt 100, quot scilicet habebat Alexander. Vides præcipuas operas positas esse in Reductione & Æquatione. Nã processum ipsum præscribit, & aperit, & dictat proposita Quæstio, qualiscunque tandem illa sit. Primo igitur videndum *qua ratione instituenda* sit *Reductio & Æquatio.*

PROP. III.

Reductionem & Æquationem numerorum Cossicorum instituere.

IN operationibus Algebraicis duo, ut dixi,

 xi,

xi, dantur numeri. Unus in quæstione propositus & datus: *ut in Exemplo superiori 100:* Alter per hypothesin unius Radicis, & processum Quæstionis inventus, *ut 4 + 20.* Hi duo numeri inæquales quidem sunt quoad appellationes & characteres; at æquales ratione valoris & virium. Ea verò æqualitas ut eruatur, *instituenda est Reductio & æquatio* juxta *sequentes Regulas.*

REGULA I.

Si dantur duo numeri æquandi *Integri* & non fracti, quorum uterque continet quantitatem ejusdē nominis aut speciei, hæc quantitas vel addenda vel subtrahenda est utrique, prout monent signa + *vel* — & qui remanent numeri erunt inter se æquales *per axioma 5. & 6.* Id verò nota, ubi est signum + semper esse auferendum; ubi est — addendum.

EXEMPLA.

I. In nota +. (1) *Sint 6 √ + 4 æquales 46. Hic 4 & 46 sunt ejusdem nominis; numeri scilicet vulgares, quibus nullus additus character Cossicus: Remove ergò 4 à 6 √ + 4*

ma-

manens 6 J item à 46 manent 42. Proinde 6 J sunt æquales 42.

(2) *6 J + 8 sunt æquales 8 J. Hic 6 J & 8 J sunt ejusdem nominis: Aufer igitur 6 J à 6 J + 8, supersunt 8. Item aufer 6 J ab 8 J remanent 2 J Proin 2 J sunt æquales 8.*

II. In NOTA — (1.) *Sint 6 J — 5, æquales 24. Hic ejusdem nominis sunt 5 & 24, numeri quippe vulgares: Et quia nota est —, addo 5 per Regul: præsentem ad 24 sunt 29. Proinde manent 6 J æquales 29.*

(2) *5 J — 4 sunt æquales 12 — 3 J. Hic similis nominis sunt 12 & 4. quæ adde ob signum — sunt 16. Item 5 & 3 sunt similis nominis, Radices quippe, quæ etiam propter signum — addantur sunt 8. Sunt igitur 8 J æquales 16, vel 1 J æqual. 2.*

III In utraq; nota + & — *Si ambo hi characteres eidem assunt exemplo, eâ ipsâ ratione ages. Sint 6 J + 5 æquales 8 J — 9. Hic ejusdē denominationis sunt 5 & 9, quorum prior licet sit + posterior — hic tamen addendum* non auferendum, quia + semper prævalet + si concurrant, quod probe observandum. *Remove igitur 9 ab 8 J — 9, & adde ad 5 sunt 14:*

Et 6 √ + 14 aequales 8 √. Porrò 6 √ & 8 √ etiam sunt ejusdem nominis: Aufer igitur 6 ab utroq; numero, supersunt 2 √ aequales 14.

REGULA II.

Si dantur duo numeri aequandi, quorum vel uterq; vel alteruter *fractus* sit, aut ex integro & fracto mixtus, fiat reductio ad fractiones, tum adde vel subtrahe pro ut monent notae + vel —. Deniq; Multiplica per crucem, & inventum erit quod quaerebatur.

EXEMPLA.

Sint $\frac{19}{24}$ √ + 50 aequales 1 √. Hic primo omnium resolvo 1 √ in fractionem hoc modo $\frac{24}{24}$ per lib. 2. Prop. 3. Reg. 2. Sumo autem 24, quia data fractionis denominator talis est. Habeo $\frac{19}{24}$ √ + 50. aequal. $\frac{24}{24}$ √ Hic ejusdem nominis sunt $\frac{19}{24}$ & $\frac{24}{24}$. Igitur per Regul. 1. aufer ab utriq; aequalia: aufer seu remove primum $\frac{19}{24}$ remanent + 50. Item aufer $\frac{19}{24}$ ab $\frac{24}{24}$ remanent $\frac{5}{24}$. Proinde $\frac{5}{24}$ √ sunt aequales 50. Postremo multiplica decussatim (postquam resolveris 20 fractionem per eandem Prop.) hac ratione $\frac{5}{24} \times \frac{50}{1}$ *proveniunt 5 & 1200.*

Igi-

Igitur 5 √. *erunt æquales* 1200 *&* 1 √. *æqual.* 240.

REGULA III.

Numerus post omnes operationes Algebraicas inventus, *plus fuerit una radice* (nam in Quæstione semper una saltem ponitur radix, adeoque cardo rei est, scire quis numerus uni Radici sit æqualis: semper autem post operationes præcedentium regularum non provenit proportio numeri ad unam radicem, sed sæpè ad radices plures) *tum adhibenda est Regula antea*, perque eam eruendus numerus Radici uni analogus, *ut: 5 √ sunt æquales 1200, cui æqualis est 1 √? fac. 240.* Breviter: duo termini vel numeri inventi dividuntur, major per minorem (nam unitas postremum in Regula locum occupans, nō multiplicat *per lib. 1. Prop. 4. Coröl. 2. Reg. 1.*) Quotiens monstrabit valorem Radicis unius. Quotiens, inquam, aperiet valorem Radicis unius, *si*, (*Quod maximè notandum*) *duo numeri æquandi, naturali ordine sibi successerint*, id est: si unus fuerit Radix, alter numerus vulgaris; vel unus ʒ

alter √: vel unus ce alter ʒ. Ita enim sese sequuntur ordine.

N. *vulg.* √. ʒ. ce. ʒʒ.

At verò *primorum [illegible] serie* positi fuerint numeri æquandi, ut si alter fuerit ʒ, alter vulgaris (omittitur hîc intermedia √) tum non quotiens post divisionem inventus, sed hujus quotientis Radix quadratà, est valor unius Radicis quæsitus. Si alter fuerit ce alter vulgaris (facto saltu per 2 scilicet omissis √ & ʒ) tum Radix Cubica Quotientis est valor unius Radicis. Atq; ita ulterius.

PROP. IV.

Exemplis declarare usum Regularum Algebraicarum.

1. Jucunditas & utilitas algebræ.

2. Præceptum Catholicum.

3. Ænigma de procis offerentibus puellæ nummos.

4. Ænigma de Emptione armentorum.

5. Ænigma de pondere statuæ: ex Epigr. Græcis.

6. Æni-

6. Ænigma de numero boum Augea propositum Herculi. Ex Epigr. Graec.
7. Inventum Archimedis de pondere argenti in Corona Hieronis.
8. Ænigma de numero puellarum.
9. Æn. de virginibus choream ducentibus.
10. Æn. de adolescente qui poma legebat in horto.
11. De duabus arboribus coincidentibus.
12. De cane insequente vulpē certâ saltuum proportione.

1.

QUi in paucis his Regulis, summâ perspicuitate à nobis expositis, mediocriter fuerit exercitatus, næ ille Exempla & ænigmata etiam difficillima, absque molestiâ, expediet; quæ sanè Res non tantum jucundissima est, & suprà quàm dici potest hominem ingenuum reficit, sed & indicibilem præstat utilitatem, & commoda multiplicia vitæ politicæ. Jam aures atque animum adverte *ad breve hoc præceptum*, cui inclusa est universa operationū algebraicarum latitudo.

2. Quoties tibi quæstio solvenda at-

que enodanda obfertur, toties mentem & oculos converte ad ejus *summam* vel *productum*, de quo aliquid quæritur: Ejus loco pone 1 ✓. *Post* distinctè & per singulas partes proponi tibi jube quæstionem, ita ut tuâ hypothesi, seu 1 ✓ agere possis pro modo & ratione circumstantiarum datæ quæstionis: Quo facto *tandem* pervenies ad æqualitatem duorum numerorum, charactere quidem dissimilium, at valore æqualium. Hos reduc per datas regulas, eò usque donec inveneris 1 ✓ æquatam esse numero alii absoluto: absolutaque erit operatio, & inventus numerus, qui quærebatur. *A facilioribus* exemplis pergam *ad difficiliora*.

EXEMPLA.

3. 1. Puellam quandam ambiverunt tres adolescentes, quorum primus muneris ergò donavit illi aliquot aureos: secundus triplo plures quam primus: Tertius tot quot duo priores conjunctim & simul, minus 5 aureis. Et omnium trium aurei collecti faciunt 67. Quæritur quantum dederit quisq; ? Hîc pone.

Pro

Pro 1. 1 ✓
Pro 2 3 ✓
Pro 3 4 ✓ — 5.

Summa est 8 ✓ — 5, *aequalis* 67. *Quia* 5, & 67 *sunt ejusdem nominis, iccircò per Regul. I. propter notam* — *addo; fiuntq;* 72 *eruntq;* 8 ✓ *aequales* 72. *Jam per Regulam auream sic ago,*

8 *dant* 72 — *quid* 1 ✓ *fac.* 9.

Igitur primus juvenis dedit virgini aureos 9. *Secundus triplum hujus, id est* 27. *Tertius tantum quantum uterq; istorum, minus quinque. Summa istorum est* 36. *quibus subtractis* 5 *relinquunt* 31. *Tantum dedit tertius. Et hae tres summa* 9. 27. 31. *faciunt* 67.

4. *II. Nobilis emit tria armenta, equum, asinum, & bovem pro* 202 ♎. *Constitit equus* 3 ♎ *plusquam asinus. Et hic* 5 ♎ *plusquam Bos: quaeritur quantum constiterit unumquodq; sigillatim? ponatur*

pro equo 1 ✓
pro asino 1 ✓ — 3
pro bove 1 ✓ — 8 (*nam* 3 & 5 *sunt* 8)

Summa est — 3 ✓ — 11 ♎ *aequalis* 202 ♎.

Hic

Hic 11 *& 202 sunt ejusdem nominis, scilicet* ♎. *Itaq. propter signum — per Reg.* 1. *addo, fiunt* 213. *Sunt igitur 3* ✓ *aeq.* 213 ♎ *Nunc per Reg. aur.* 3 — *dant* 213 — *quid* 1 *fac* 71 ♎ *pro equo.*

Itaq. Equipretium est 71. *Pro asino* 3 *minus, id est* 68 ♎. *Pro bove* 8 *minus, id est* 63 ♎. *quae tres summae* 71. 68. 63. *faciunt* 202.

5. III. Libro 1 Epigram. Græc. c. 46 § 5. hoc legitur Problema de statuis. *Ego sum ex auro confecta Pallas. Aurum ipsum munus est juvenum Poetarum. Dimidium ejus contribuit Charisius. Octavam partem Thespis. Decimam Solon. Vigesimam Themison. Reliqua talenta novem & artificium, munus est Aristodici. Quaeritur pondus totius statuae. Ponatur esse* 1 ✓. *Ejus* $\frac{1}{2}$ ✓, $\frac{1}{8}$ ✓, $\frac{1}{10}$ ✓, $\frac{1}{20}$ ✓ *addantur per Prop.* 7. *lib.* 2. *proveniunt* $\frac{124}{160}$, *vel divisione utrobique facta per* 4, *reductis ad minorem fractionem numeris* $\frac{31}{40}$ ✓. *His adjungantur* 9 *talenta, fiunt* $\frac{31}{40}$ ✓ + 9, *aequales* 1 ✓ *quae pro tota statua est assumpta. Hic* $\frac{31}{40}$ ✓ & ✓ *sunt ejusdem nominis. Igitur per Regul.* 2. *Propter signum* + *auferuntur hinc & hinc: Aufer, inquam,* $\frac{31}{40}$ *ab* $\frac{31}{40}$ + 9, *remanent* 9: *aufer etiam eadem*

eadem $\frac{31}{40}$ ab 1 √, seu a $\frac{40}{40}$, remanent $\frac{9}{40}$. Proinde $\frac{9}{40}$ √ sunt aequales 9, per axioma saepius dictum. Nunc porro quia horum numerorum aequandorum alter est fractus, idcirco per Reg. 2. resolve 9 in fractionem $\frac{9}{1}$, & multiplico decussatim $\frac{9}{40} \times \frac{9}{1}$ fiunt 9 & 360. Itaque 9 √ sunt aequales 360: Et per Reg. universalem 1 √ aequalis 40; Id scilicet est pondus totius statuae: Cujus $\frac{1}{2}$ vel 20, dedit Charisius: $\frac{1}{8}$ vel 5, Thespis $\frac{1}{10}$ vel 4 Solon: $\frac{1}{20}$ vel 2 Themison, quibus 9 talenta adde; Et habebis totum pondus 40.

6. IV Ibidem lib. 1. Epigr. c. 46. §. 6. etiam hoc proponitur ζήτημα. Augeam interrogavit Hercules de multitudine boum. Cui ille respondit. Media illorum pars circa Alpheum fluvium pascitur. Octava circa Saturni collem. Duodecima juxta loca Taraxippi. Vigesima circa Elidem. Trigesimam in Arcadia reliqui. Reliquos 50 hic vides. Quaeritur universus Boum numerus? Ponatur 1 √ boum. Hujus $\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{20}\,\frac{1}{30}$ addita faciunt $\frac{19}{24}$ quibus adjunctae 50 fac. $\frac{19}{24}$ √ + 50 aequales 1 √. Per Regulam 2. abjice hinc & istinc $\frac{19}{24}$ prout factum vidisti in exemplo praece-

præcedenti; remanent $\frac{5}{24}$ √ resolve 1 √ in $\frac{24}{24}$ & $\frac{19}{24}$ aufer à $\frac{24}{24}$ restant $\frac{5}{24}$) æquales 50. Fiat per eandem Regulam multiplicatio decussatim $\frac{5}{24}$ ✕ $\frac{50}{1}$ proveniunt 5 & 1200. Igitur 5 √ sunt æquales 1200. Et per Regulam auream 1 √ æqual. 240. Totus proinde boumgrex fuit 240, cujus $\frac{1}{2}$ vel 120, circa Alpheum $\frac{1}{8}$ vel 30, in colle Saturni $\frac{1}{12}$ vel 20 in locis Taraxippi. $\frac{1}{20}$ vel 12 in Elide: $\frac{1}{30}$ vel 8 in Arcadia; his si addantur reliqua 50 fiunt 240.

7. *V. Rex Hieron Apollini voverat Coronam ex solido auro. Eam artifex dum fabricavit, furtum facturus Regi, commiscuit auro aliquam argenti portionem. Rex dolum intelligens, Archimedem jussit scrutari quantitatem additi argenti, ne opus foret coronam eleganti artificio elaboratam, Vulcano dissolvendam dare. Archimedes satisfacturus Hieroni, paravit massam puri auri ad pondus coronæ: Et aliam ad consimile pondus ex argento, Tum item cõfici curavit vas ex nitido ære, ejus amplitudinis, ut coronam commodè caperet. Ei aquâ repleto ad summum labrum, primo immersit coronam, & effluentem aquam*

quam lance vitida exceperat, quantum ponderet accurate exploravit. Ad eundem modum, secundo etiam auri, & postremo argenti massam etiam seorsim imposuit, in idem plenum vas. Ita adinvenit tria distincta aquæ pondera. Jam facile quis intellexerit è massa puri auri non effluxisse tantum aquæ quantum à Coronâ, Nec ab hac tantum, quantum ab argento. Quia aurum sub æquali pondere, multò minus est argento. Duo enim globi similis ponderis, alter ex auro, alter argento, dissimilis sunt quantitatis, ille minor, hic major. Aut si mole fuerint æquales; pondere huic iste prævalebit. Cæterùm quia nemo scire potest, quantum aquæ effluxerit à qualibet massa, ignotum quoque manet pondo cujusque massæ. Eam ob causam nemo historiæ veritatem definite determinabit. Tamen nihil obstat quo minus casum fingere, & hypothesin ponere nobis liceat. Saltem ἀναλογία καθολικὴ vera non poterit nesciri; Ut se habet aqua effluxa ab auro ad aurum, item aqua ab argento ad argentum, ita aqua à Corona ad Coronam. Itaque quanto aqua Coronæ paucior fuerit quam argen-

argenti, quanto copiosior quam auri, tanto & minorem vel majorem quantitatem auri aut argenti possidebit.

1. *Supponamus, animi gratia, Coronam pendere esse 10 libras, & ex immissione aureæ massæ fluxisse 1 libram aquæ: ex immissione Coronæ* $\frac{1}{18}$ ℔: *ex immissione argenti* $1\frac{1}{2}$ ℔. *Si jam Corona fuerit* 10 ℔ *ponatur in ea fuisse* 1 ∫ *auri: Ergo argenti fuit* 10 — 1 ∫ *His constitutis Regula aurea ita habet.*

10 ℔ *auri dant* 1 ℔ *aq. quid* 1 ∫ *f* $\frac{1}{10}$ ∫.
Et 10 ℔ *argent. dant* $1\frac{1}{2}$ ℔ *aq. quid* 10 — 1 ∫? *fac.* $\frac{30-3}{20}$ ∫.

(*Nam ex* $1\frac{1}{2}$ *fac. unam fractionem fiunt* $\frac{3}{2}$, *quam multiplica in* 10 — 1 ∫ *ita* $\frac{3}{2}$ 10 — 1 *id est: ter* 10 *sunt* 30: *ter* 1 *sunt* 3: *habes* 30 — 3 ∫. *Tum decies* 2 *sunt* 20, *habes totam fract.* $\frac{30-3\int}{20}$) *Hæc duo producta addita, scil.* $\frac{1}{10}$ & $\frac{30-3}{20}$ ∫ *faciunt* $\frac{300-10}{200}$ ∫ (*Nam, reducantur prius ad eandem denominationem, per Prop. 6 libr. 2. facta nominatorum multiplicatione, decies 20 sunt 200, nascitur communis denominator. Hinc multiplicentur per crucem, semel 20 sunt 20: unde prima fra-*

ctio

Ctio $\frac{20}{200}$: item decies 30, sunt 300, & decies 3, sunt 30, hinc altera fractio.

$$\frac{300 - 30 \surd}{200}$$

$$\frac{1 \surd}{10} \quad \frac{30 - 3 \surd}{20} \Bigg| \frac{20}{200} \quad \frac{300 - 30 \surd}{200}$$

Hæ duæ fractiones addi debent: Quia vero adest signum — non addi, sed auferri postulant numeratores illi, qui sunt ejusdem characteris, & supra scribendi communi nomini: aufer igitur 20 de 30 (uterq; enim est Radix) manet tota fractio $\frac{300 - 10 \surd}{200}$ & minoribus characteribus $\frac{30 - 1 \surd}{20}$) Hæc ipsa $\frac{30 - 1 \surd}{20}$ æquantur $1\frac{1}{16}$ ℔ aquæ, à corona effluxæ. Multiplicentur hi numeri invicem, fiunt $\frac{340}{16}$ æqual. 30—1 $\surd$, hoc est $21\frac{1}{4}$ æqual. 30. Aufer ab iisdem æqualia. scil. $21\frac{1}{4}$ manet 1 $\surd$ æqual. $8\frac{3}{4}$: Habuit igitur Corona $8\frac{3}{4}$ ℔ puri auri. Reliquum ad 10 libras (nam posuimus Coronam fuisse 10 ℔) est $1\frac{1}{4}$ ℔ Argent.

IV. In Regula tertia dixi, quoties numeri æquandi, se non consequuntur naturali ordine, sed interrupto, ut si unus sit ℥, alter vulgaris, (interjecta media $\surd$) vel

vel unus & alter √ (interjecto ʒ) tum non Quotientem à Divisione aut Regula aureâ, relictum, sed illis Radicem Quadratam aut Cubicam, esse numerum quæsitum. *Utriusque varietatis unum apponam exemplum*: & primum *de Radice quadrata*. *Quæratur numerus, cujus ½ ducta in ejusdem ⅓ producat* 24. *Posita* 1 √ *sumatur ejus* ½ √ *&* ⅓ √ *quæ invicem multiplicatæ faciunt* ⅙ ʒ *æqual*: 24. Hic nota, radices multiplicatas in Radices (ut hoc loco) non dare radices, sed Quadrata; velut numerus vulgaris multiplicatus in Radices, dat Radices: Et radices multiplicatæ in quadrata, dant cubos. *In numero igitur invento* ⅙ ʒ *æq*. 24, *quia* ⅙ *est* ʒ, *&* 24 *nota vulgaris, saltusq; fit per omissas medias Radices, itaque protenus colligo* [illegible] *vim Regulæ, valorem unius* ℞, *esse Radicem Quadratam numeri inveniendi (quia* ⅙ *est* ʒ: *si esset* cc, *valor unius* ℞, *esset* ℞ *Cubica*) *Igitur resolve* 24 *in fractionem, fiet* ⅙ ʒ *æqual*. $\frac{24}{1}$. *Jam juxta Regul.* 2 *multiplica decussatim provenient* 1 ʒ *&* 144. *Igitur* 1 ʒ *est æqual*. 144. *Hujus numeri* 144 *radix quadr. scilicet* 12, *est*

valor

valor 1 √, & *numerus quæsitus. Nam si dimidium de* 12, *scil:* 6 *ducatur in partem tertiam de* 12, *scil.* 4. *fiunt* 24.

VII. Exemplum *pro Radice Cubica.* *Quæritur numerus qui in se ductus, & productum hoc in ejusdem numeri trientem multiplicatum, producat* 72. *Ponatur* 1 √ *quia multiplicata in se vel per* 1 √ *facit* 1 ʒ (*radices enim per* ℞ *multiplicata dant, ut dixi,* ʒ) *Id* 1 ʒ *multiplicetur in* $\frac{1}{3}$ √ *fac.* $\frac{1}{3}$ ce (*nam* ʒ *multiplic. per* √ *fac* ce) *Igitur* $\frac{1}{3}$ ce *est æqualis* 72. *Frange* 72, & *multiplica decussatim* 1 ce 72 *proveniunt* 1 ce & 216. *Igitur* 1 ce *æ-*
$\frac{}{3} \times \frac{}{1}$
quatur 216. *Hic quia saltus fit per duo* (*nam inter simplicem numerum & cubum sunt* √ & ʒ) *eruenda est ex* 216 *Radix cubica, quæ est* 6, *numerus quæsitus. Nam* 6 *multiplicata in se dant* 36, *quæ iterum multiplicata in* $\frac{1}{3}$ *de sex, seu* 2, *faciunt* 72.

Exempla Alia.

Ut habeant Ingeniosiores, quo sese exerceant, adjungam auctarii loco, *exempla* quædam *ænigmatica* perquàm jucunda.

§. VIII.

8. VIII. *Juvenis præteriens aliquot puellas ambulantes, salvete, inquit, omnes decem. Respondit una illarum, si essemus adhuc totidem, & insuper tertia pars, tum tot essemus infra triginta, quot jam sumus supra 10. Quæritur earum numerus? Operare & invenies fuisse 12. Nam si summas 12, & adhuc 12, & partem tertiam seu 4, erunt 28, quæ binario absunt à 30, quemadmodum 12 per 2 accedunt 10.*

9. IX. *Virgines aliquot choream ducunt. Ad eas sese adjungunt 12 aliæ. Paulò post abducitur dimidia pars omnium Virginum, & accedunt puellæ aliæ duæ. Tum inveniuntur ibidem tres amplius virgines, quàm ab initio fuerant. Quæritur primus numerus? Si calculum benè posueris, invenies initio fuisse* 10 : *quibus si addas* 12, *habebis* 22. *Dimidiâ parte ablatâ relinquuntur* 11, *ad quas accedant* 2, *fiunt* 13. *Hîc tres plus sunt quam* 10.

10. X. *Adolescens ingreditur hortum per tres portas, ordine sibi succedentes, poma decerpturus. Exeuntem iterum, janitor poscit dimidiam pomorum partem; quam & illi donat:*

donat: Restituit tamen illi janitor de summâ poma 12. Ita & secundo janitori dat dimidium suorum pomorum, abs quo iterum recipit 10. Tertio iterum dimidium reliquorum, abs quo recipit 4. Dum verò poma connumerat domum reversus, videt sibi relictum esse dimidium numerum pomorum omnium, quæ in horto legerat. Quæritur quot poma legerit? Invenies 32. quorum dimidium 16 dedit janitori A, retinuit 16: sed & recepit 12; servavit ergò 28. De his dimidium 14 dedit Janitori B, & ab eo recepit 10: retinuit ergò 24. Horum dimidium 12 dedit janitori C, retinuit 12: recepit ab eo 4: retinuit ergò 16. Et hæc 16 sunt dimidium de 32.

11. XI. Duæ arbores in planitie consistunt: alteram altitudine 30, alteram 40 ulnarum. Distant à se invicem per 50 ulnas. Decussæ à vento ita cõcidunt, ut cacumina earũ conjungantur. Demittitur è conjunctis cacuminibus perpendiculum ad terram? Quæritur quantũ illud absit ab utriusq; arboris radice? & quanta ejus longitudo. Invenies abesse ab arbore 30 ulnarum, per 18 ulnas: à reliquâ, per ulnas 32. Et longitudinem totius perpendiculi 24 uln.

12. XII. *Venator cane vulpem persequitur. Vulpes 60 saltibus canem antecedit. Quoties verò vulpes absolvit 9 saltus, toties canis 6. Sed tamen 3 saltus canis, æquales sunt 7 saltibus vulpis. Quæritur quot saltus absolvendi sint cani, priusquam vulpem attingat? Respondeo, 72. Nam 72 saltus canini sunt sexies 12. Interea vulpes facit novies 12 id est, 108. Jam vulpes ante absolverat 60 Itaque manent saltus vulpini 168. Eos assequitur canis 72 saltibus: siquidem 3 faciunt 7: Ergò 72 fac. 168. aut conversim.*



P. LAU-

P. LAUREMBERGI. INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM.

LIBER. V.

DE LOGISTICA ASTRONOMICA.

PROP. I.

Cognitio numerorum Astronomicorum.

1. *Divisio circulorum mathematica in gradus.*
2. *Divisio graduũ in minuta, Et quot milliaria habeat unus gradus in terra.*
3. *Scrupulorum divisio.*
4. *Sexagena.*
5. *Signa.*
6. *Exemplum ex re argentaria.*
7. *Divisio quorumvis integrorum.*
8. *Characteres minutiarum.*



HÆc altera est numerorum species. Dicitur *Logistica Astronomica* ab usu, quem præstat Astronomiæ, & calculo motuum cœlestium.

1. Ut scias *quid sint numeri ac minutiæ Astronomicæ*, non ignorabis, unumquemque ex circulis cœlestibus (quibus Astronomi ad sydereum motus cognoscendos utuntur) vel ex terrestribus, (quorum in Geographia usus est,) quemlibet, inquam, *circulum* dividi in *360 partes*, quas *Gradus* vocant artifices, forsan à gradiendo, quia per hos gradus Sol & reliqua sydera progrediuntur. Maluerunt verò Astronomi divisionem *sexagenariam* assumere præ aliis, ob commoditatem, quia in plurimas partes quotas dividi potest, ut in duas. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 10. &c. Et sanè vix ullum invenies numerum, quem in tot partes æquales partiri queas. Breviter: Omnis Circulus cœlestis & terrestris, ut Æquator, Meridianus, Ecliptica, Horizon, dividitur in 360 gradus.

2. Cæterùm, quia unusquisque ex his gradi-

gradibus maximum adhuc & amplissimum occupát spacium, tám in cœlo quàm in terrâ (in terra enim unus gradus complectitur XV Milliaria Germ: quantum continebit in vastissimo cœli ambitu, cujus respectu terra est puncti instar?) hanc ob causam *ulterius* unusquisque *gradus subdivisus* fuit *in 60 partes alias*, quas vocârunt *scrupula*, vel *Minuta prima*, eò quod gradus in hæc dividantur, divisione primâ. Cum igitur in Circulo sint gradus 360, & gradus unus contineat 60 scrupula, erunt in toto circulo scrupula 21600.

§. At verò unumquodque ex his scrupulis adhuc nimis magnum erat; itaque *ulteriori subdivisione* opus fuit: & ut gradus continet 60 scrupula prima, ita quilibet *scrupulus primus*, divisus est *in 60 secundos*: Et ulterius quilibet *Secundus*, *in 60 tertios*: Ita ad scrupula *usque decima* progressi sunt Alphonsini. Hodiè verò rarò ascendimus *ultra quinta aut sexta*. Breviter, 60 scrupula tertia conficiunt unum scrupulum secundum: 60 secunda

argenti, quanto copiosior quam auri, tanto & leviorem vel majorem quantitatem aqua auri, vel argenti possidebit.

Supponamus, animi gratia, Coronam pendere 10 libras, & ex immissione aureæ massæ effluxisse 1 libram aquæ; ex immissione Coronæ $\frac{1}{10}$ ℔: *ex immissione argenti* $1\frac{1}{2}$ ℔. *Si jam Corona fuerit 10* ℔ *ponatur in ea fuisse 1 J auri: Ergo argenti fuit 10—1 J. His constitutis Regula aurea ita habet.*

10 ℔ *auri dant 1* ℔ *aq. quid 1 J? f* $\frac{1}{10}$ J.
Et: 10 ℔ *argent. dant* $1\frac{1}{2}$ ℔ *aq. quid 10—1 J? fac.* $\frac{30-3}{20}$ J.

(Nam ex $1\frac{1}{2}$ *fac. unam fractionem fiunt* $\frac{3}{2}$, *quam multiplica in 10—1 J ita* $\frac{3}{2}$ *10—1 id est: ter 10 sunt 30: ter 1 sunt 3. habes 30—3 J. Tum decies 2 sunt 20, habes totam fract.* $\frac{30-3 J}{20}$.) *Hæc duo producta addita, scil.* $\frac{1}{10}$ *&* $\frac{30-3}{20}$ J *faciunt* $\frac{300-10 J}{200}$ *(Nam, reducantur prius ad eandem denominationem per Prop. 6 libr. 2. facta nominatorum multiplicatione, decies 20 sunt 200, nascitur communis denominator. Hinc multiplicentur per cruce semel 20 sunt 20: unde prima fra-*

ctio

Etia $\frac{20}{200}$: *item decies 30, sunt 300, & decies 3, sunt 30, hinc altera fractio.*

$\frac{300 - 30\,\surd}{200}$

$\frac{1\,\surd}{10}$ $\frac{30 - 3\,\surd}{20}$ | $\frac{20}{200}$ $\frac{300 - 30\,\surd}{200}$

Hæ duæ fractiones addi debent: Quia vero adest signum — non addi, sed auferri postulant numeratores illi, qui sunt ejusdem characteris, & supra scribendi communi nomini: aufer igitur 20 de 30 (uterq; enim est Radix) manet tota fractio $\frac{300 - 10\,\surd}{200}$ *& minoribus characteribus* $\frac{30 - 1\,\surd}{20}$) *Hac ipsa* $\frac{30 - 1\,\surd}{20}$ *æquantur* $1\frac{1}{16}$ ℔ *aquæ, à corona effluxa. Multiplicentur hi numeri indicem, fiunt* $\frac{340}{16}$ *æqual.* $30 - 1\,\surd$, *hoc est* $21\frac{1}{4}$ *æqual.* 30. *Aufer ab iisdem æqualia. scil.* $21\frac{1}{4}$ *manet* $1\,\surd$ *æqual.* $8\frac{3}{4}$: *Habuit igitur Corona* $8\frac{3}{4}$ ℔ *puri auri. Reliquum ad* 10 *libras (nam posuimus Coronam fuisse* 10 ℔) *est* $1\frac{1}{4}$ ℔ *Argent.*

IV. In Regula tertia dixi, quoties numeri æquandi, se non consequuntur naturali ordine, sed interrupto, ut si unus sit ℨ, alter vulgaris, (interjecta media $\surd$) vel

vel unus vel alter ✓ (interjecto ʒ) tum non Quotientem à Divisione aut Regula aureâ, relictum, sed illis Radicem Quadratam aut Cubicam, esse numerum quæsitum. *Utriusque varietatis unum apponam exemplum* : & primum *de Radice quadrata. Quæritur numerus, cujus* $\frac{1}{2}$ *ducta in ejusdem* $\frac{1}{3}$ *producat* 24. *Posita* 1 ✓ *sumatur ejus* $\frac{1}{2}$ ✓ *&* $\frac{1}{3}$ ✓ *quæ invicem multiplicatæ faciunt* $\frac{1}{6}$ ʒ *æqual*: 24. Hic nota, radices multiplicatas in Radices (ut hoc loco) non dare radices, sed Quadrata; velut numerus vulgaris multiplicatus in Radices, dat Radices : Et radices multiplicatæ in quadrata, dant cubos. *In numero igitur invento* $\frac{1}{6}$ ʒ *aq.* 24, *quia* $\frac{1}{6}$ *est* ʒ, *&* 24 *notæ vulgaris, saltusq; fit per omissas medias Radices, itaque protenus colligo juxta vim Regulæ, valorem unius* ℞, *esse Radicem Quadratam numeri inveniendi (quia* $\frac{1}{6}$ *est* ʒ: *si esset* ce, *valor unius* ℞, *esset* ℞ *Cubica) Igitur resolve* 24 *in fractionem, fiet* $\frac{1}{6}$ ʒ *æqual.* $\frac{24}{1}$. *Jam juxta Regul.* 2. *multiplica decussatim provenict* 1 ʒ *&* 144. *Igitur* 1 ʒ *est æqual.* 144. *Hujus numeri* 144 *radix quadr. scilicet* 12, *est*

valor

valor 1 √, & numerus quæsitus. Nam si dimidium de 12, scil: 6 ducatur in partem tertiam de 12, scil. 4. fiunt 24.

VII. Exemplum *pro Radice Cubica.* *Quæritur numerus qui in se ductus, & productum hoc in ejusdem numeri trientem multiplicatum, producat 72. Ponatur 1 √ quia multiplicata in se vel per 1 √ facit 1 ʒ (radices enim per ℞ multiplicata dant, ut dixi, ʒ) Id 1 ʒ multiplicetur in $\frac{1}{3}$ √ fac. $\frac{1}{3}$ ce (nam ʒ multiplic. per √ fac ce) Igitur $\frac{1}{3}$ ce est æqualis 72. Frange 72, & multiplica decussatim $\frac{1}{3}$ ce $\frac{72}{1}$ proveniunt 1 ce & 216. Igitur 1 ce æ-*
3 × 1
quatur 216. Hic quia saltus fit per duo (nam inter simplicem numerum & cubum sunt √ & ʒ) eruenda est ex 216 Radix cubica, quæ est 6, numerus quæsitus. Nam 6 multiplicata in se dant 36, quæ iterum multiplicata in $\frac{1}{3}$ de sex, seu 2, faciunt 72.

EXEMPLA ALIA.

Ut habeant Ingeniosiores, quo sese exerceant, adjungam auctarii loco, *exempla* quædam *ænigmatica* perquàm jucunda.

§. VIII.

8. VIII. Juvenis præteriens aliquot puellas ambulantes, salvete, inquit, omnes decem. Respondit una illarum, si essemus adhuc totidem, & insuper tertia pars, tum tot essemus infrà triginta, quot jam sumus suprà 10. Quæritur earum numerus? Operare & invenies fuisse 12. Nam si summas 12, & adhuc 12, & partem tertiam seu 4, erunt 28, quæ binario absunt à 30, quemadmodum 12 per 2 accedunt 10.

9. IX. Virgines aliquot choream ducunt. Adeas sese adjungunt 12 aliæ. Paulò post abducitur dimidia pars omnium Virginum, & accedunt puellæ aliæ duæ. Tum inveniuntur ibidem tres amplius virgines, quā ab initio fuerant. Quæritur primus numerus? Si calculum benè posueris, invenies initio fuisse 10: quibus si addas 12, habebis 22. Dimidiâ parte ablatâ relinquuntur 11, ad quas accedant 2, fiunt 13. Hîc tres plus sunt quam 10.

10. X. Adolescens ingreditur hortum, per tres portas, ordine sibi succedentes, poma decerpturus. Exeuntem iterum, janitor poscit dimidiam pomorum partem; quam & illi donat:

donat: Restituit tamen illi janitor de summâ poma 12. Ita & secundo janitori dat dimidium suorum pomorum, abs quo iterum recipit 10. Tertio iterum dimidium reliquorum, abs quo recipit 4. Dum verò poma connumerat domum reversus, videt sibi relictum esse dimidium numerum pomorum omnium, quæ in horto legerat. Quæritur quot poma legerit? Invenies 32. quorum dimidium 16 dedit janitori A, retinuit 16: sed & recepit 12; servavit ergò 28. De his dimidium 14 dedit Janitori B, & ab eo recepit 10: retinuit ergò 24. Horum dimidium 12 dedit janitori C, retinuit 12: recepit ab eo 4: retinuit ergò 16. Et hæc 16 sunt dimidium de 32.

11. XI. *Duæ arbores in planitie consistunt; altera altitudine 30, altera 40 ulnarum. Distant à se invicem per 50 ulnas. Decussæ à vento ita cõcidunt, ut cacumina earũ conjungantur. Demittitur è conjunctis cacuminibus perpendiculum ad terram? Quæritur quantũ illud absit ab utrimq; arboris radice? & quanta ejus longitudo. Invenies abesse ab arbore 30 ulnarum, per 18 ulnas: à reliquâ, per ulnas 32. Et longitudinem totius perpendiculi 24 uln.*

I 11. XII.

12. XII. *Venator cane vulpem persequitur. Vulpes 60 saltibus canem antecedit. Quoties verò vulpes absolvit 9 saltus, toties canis 6. Sed tamen 3 saltus canis, æquales sunt 7 saltibus vulpis. Quæritur quot saltus absolvendi sint cani, priusquam vulpem attingat? Respondeo, 72. Nam 72 saltus canini sunt sexies 12. Interea vulpes facit novies 12, id est, 108. Jam vulpes ante absolverat 60 Itaque manent saltus vulpini 168. Bos assequitur canis 72 saltibus: siquidem 3 faciunt 7: Ergò 72 fac. 168.*

aut conversim.



P. LAU-

P. LAUREMBERGI.

INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM.

LIBER. V.

DE LOGISTICA ASTRONOMICA.

PROP. I.

Cognitio numerorum Astronomicorum.

1. *Divisio circulorum mathematica in gradus.*
2. *Divisio graduũ in minuta, Et quot milliaria habeat unus gradus in terra.*
3. *Scrupulorum divisio.*
4. *Sexagena.*
5. *Signa.*
6. *Exemplum ex re argentaria.*
7. *Divisio quorumvis integrorum.*
8. *Characteres minutiarum.*

I 2


ÆC altera est numerorum species. Dicitur *Logistica Astronomica* ab usu, quem præstat Astronomiæ, & calculo motuum cœlestium.

1. Ut scias *quid* sint *numeri ac minutiæ Astronomicæ*, non ignorabis, unumquemque ex circulis cœlestibus (quibus Astronomi ad syderum motus cognoscendos utuntur) vel ex terrestribus, (quorum in Geographia usus est,) quemlibet, inquam, *circulum* dividi in *360 partes*, quas *Gradus* vocant artifices, forsan à gradiendo, quia per hos gradus Sol & reliqua sydera progrediuntur. Maluerunt verò Astronomi divisionem *sexagenariam* assumere præ aliis, ob commoditatem, quia in plurimas partes quotas dividi potest, ut in duas. 3. 4 5. 6. 8. 9. 10. &c. Et sanè vix ullum invenies numerum, quem in tot partes æquales partiri queas. Breviter: Omnis Circulus cœlestis & terrestris, ut Æquator, Meridianus, Ecliptica, Horizon, dividitur in 360 gradus.

2. Cæterùm, quia unusquisque ex his gradi-

gradibus maximum adhuc & amplissimum occupat spacium, tam in cœlo quàm in terrâ (in terra enim unus gradus complectitur XV Milliaria Germ: quantum continebit in vastissimo cœli ambitu, cujus respectu terra est puncti instar?) hanc ob causam *ulterius* unusquisque *gradus subdivisus* fuit *in 60 partes alias*, quas vocârunt *scrupula*, vel *Minuta prima*; eò quod gradus in hæc dividantur; divisione primâ. Cum igitur in Circulo sint gradus 360, & gradus unus contineat 60 scrupula, erunt in toto circulo scrupula 21600.

§. At verò unumquodque ex his scrupulis adhuc nimis magnum erat; itaque *ulteriori subdivisione* opus fuit: & ut gradus continet 60 scrupula prima, ita quilibet *scrupulus primus*, divisus est *in 60 secundos*: Et ulterius quilibet *Secundus*, *in 60 tertios*: Ita ad scrupula *usque decima* progressi sunt Alphonsini. Hodiè verò rarò ascendimus *ultra quinta aut sexta*. Breviter, 60 scrupula tertia conficiunt unum scrupulum secundum: 60 secunda

unum primum: 60 prima unum gradum.

4. Si jam porrò sumantur itidem *60 gradus*, oritur Totum aliquod, quód Astronimi vocant *sexagenam*, scilicet quia continet 60 gradus. Et quemadmodum ex 60 gradibus componitur una sexagena prima: ita *ex 60 sexagenis primis* componitur *una sexagena secunda*: atq; *ita ulterius*. Ex gradibus, inquam, 60 fit una sexagena.

5. Sed *ex gradibus 30* fit unum *signum*, Namque modò signis, modò sexagenis utuntur Astronomi: adeoque duo signa constituunt unam sexagenam.

6. Ut hanc distributionum plenius capias, dabo tibi *exemplum* familiare. *As* noster vulgaris, est tanquam gradus. Hic dividitur in 4 quadrantes, tanquam scrupula prima: Unusquisque quadrans in tres nummos, tanquam scrupula secunda; nummus quilibet in duos obolos, quasi scrupula tertia. Rursus ex 24 assibus velut gradibus, fit unus florenus, tanquam sexagena: vel ex 16 assibus fit una marca, tanquam

quam signum: Ex duobus florenis fit unus aureus, quasi una sexagena secunda. &c.

7. Ad hunc modum Astronomi non tantùm dividunt unum gradum in 60 minuta, verùm etiã quãlibet rem integram, ut horam, pedem, gnomonem, umbram. Ita una hora habet 60 minuta prima: & unum minutum horæ primum 60 secunda.

8. Solent verò Astronomi in gratiam compendii his suis particulis *peculiares* ascribere *notas*, quarum judicio illæ significantur. *Signorum* character est S, *gradus* o, *scrupulorum primorum* I, *secundorum* II, *tertiorum* III, *sexagena prima* ita pinguntur \ *secunda* \\ *tertia* \\\. Exemplum.

S	o	I	II	III	IV
4.	25.	59.	16.	28.	40.

Id est 4 signa, 25 gradus. 59 minuta prima: 16 secunda: 28 tertia: 40 quarta.

\\	\	o	I	II	III	IV	V
13	21.	45.	37.	0.	26.	18.	50.

id est: 13 sexagenæ secunda. 21 primæ. 45 gradus: 37 scrupula prima: nullum secundum, 26 tertia &c.

PROPOS. II.

Numeros Astronomicos invicem addere.

CUm dantur particulæ Astronomicæ multarum specierum, *primò* omnium opera erit danda, ut species ejusdem denominationis sibi invicem subscribantur, Gradus sub gradibus; Minuta sub minutis. Etenim si addendæ fuerint & Marcæ, & asses, & nummi, *tum* non adduntur marcæ nummis vel assibus, sed marcæ marcis, asses assibus; nummi nummis. Ita & hîc ut fiat oportet. *Ubi jam* sic collocaveris ordine tuas species, & subduxeris, ut moris est, *lineam*, à dextris operationem exordire, & numeros cujusque speciei seorsim in unam summam collige: Eâ cautione, ut si numerus, qui ex speciebus additis resultat, major fuerit quâm 60, tum abjicias 60, quoties fieri potest, & subsequenti versus sinistram speciei, addas unitatem pro singulis 60 abjectis.

EXEMPLA.

I. Addenda sint hæ particulæ,

His

\	0	I	II	III
38	8	59	36	12
54	28	30	34	20

\\	\	0	I	II	III
1	32	37	30	10	32

Hic vides cujusq; ordinis species sibi justè suppositas. Eas additurus, auspicator à dextris. Nihil & 2 sunt 2. Duo & 1 sunt 3. Non est hic numerus major quàm 60, itaq; scribo 32^{III}*. Ulterius, sex & 4 sunt 10, scribatur 0 servetur 1. Tria & 3 sunt 6, & 1 sunt 7. Hic habes 70*^{II}*. Sed 60*^{II} *dant unum minutum primum. Igitur abjice 60, & loco eorum ascribe sequenti seriei unum. Remanent proin 10*^{II}*. Rursus 1 illud adjectum, & 9 sunt 10. scribe 0, serva 1, Tria & 5 sunt 8, & unum jam servatum sunt 9. Hic rursus habes plus quàm 60. Abjice igitur 60, remanent 30 scribenda; & pro 60 abjectis, adjiciendum 1 seriei sequenti. Perge: unum & 8 sunt 9, & 8 sunt 17. Scribe 7, serva 1. Unum id servatum & 2 sunt 3. Hic minus est quàm 60: igitur nihil*

abjiciendum. Deniq; 4 & 8 sunt 12. scribe 2, serva 1. Id 1 & 5 sunt 6, & 3 sunt 9. Hic iterum plus habes quàm 60, nimirum 92: aufer ergò 60: supersunt 32: Et pro illis 60 abjectis, ascribe 1 sequenti seriei : Tandem invenis sum-

\\\ ° I II III

mam, 1.32.37.30.10.31.

II. potest & hæc res exemplo declarari monetarum. *Sint addenda* ₰ ß ₰

2 15 6

3 9 7

6 9 1

Collocatis ordine speciebus, addo sex & 7 fiunt 13 sed quia 12 ₰ faciunt 1 ß, abjicio 12, & servo quod reliquum est, nimirum 1: Proq; 12 ₰ adjicio 1 ß ad numerum assium. Rursus 1 & 9 sunt 10, & 15 sunt 25. Sed quia 16 ß faciunt 1 ₰, abjicio 16 à 25, supersunt 9 ß: pro quibus 16 ß abjectis ascribo marcis 1 marc: Postremò 1 & 3 sunt 4, & 2 sunt 6. Tumq; summa 6 ₰ 9 ß 1 ₰.

PROF.

PROP. III.

Numeros Astronomicos subtrahere.

DIsponantur particulæ *eâdem lege* quâ in additione; minuta sub minutis, gradus sub gradibus, sexagenæ aut signa, sub sex: aut signis. *Tum* facto à dextris initio, auferatur inferior numerus à superiore, ut solent fieri in vulgari Arithmetica. Reliquum subscribatur. *Cæterùm* si inferior major fuerit superiori, tum commodata sumenda sunt 60 ex ordine proximè sequenti, cui hanc ob causam punctulus erit adscribendus, ut in Universali subtractione docuimus *lib.4. prop.* 3. Dicam adhuc *luculentiùs*. Omnes numeri Astronomici ad summum constant duobus characteribus, (ultra 60 enim non assurgunt.) Jam si primus seu dexter character inferior, major est superiori, & proinde auferri nequit, addantur superiori 10, & sic fiat subtractio. Si character sinister vel secundus major est superiori, & ob id subtrahi nihil potest, addantur superiori 6, atque ita ex

illis conjunctis fiat subtractio: appicta semper unitate characteri sequenti.

EXEMPLA.

I. Sint hi numeri invicem auferendi. Imago.

\	0	I	II
27	32	44	16
1.8.	4.6.	5.5.	9
\	0	I	II
8	45	49	7

Novem de 16 manent 7. Quinque de 4 non possunt. Asscribatur proximis 5, unitas. Quinque de 14 (additis 10 ad superiora 4, qui primus est character) supersunt 9. Tum 5 & 1 seu 6, de 4, seu de 10 (addo enim 6, quia est secundus character) manent 4 ascribatur 1 sequenti seriei. Jam 6 & 1 seu 7, de 2 non possunt: de 12 manent 5. Quatuor & 1 seu 5, de 3 non possunt, de 3 & 6 seu 9 supersunt 4. octo & 1, seu 9, de 7 & 10, manent 8. 1 & 1 seu 2 de 2, manet nihil. Summa est

/ 0 I II
8.45.49.7.

II. In-

II. Instituenda subtractio inter hos numeros: (ut è re numeraria petitum exemplum apertius demonstret vim præcepti) *Auferantur 9 de 4. quod quia nequit fieri, commodato summo è vicinia 1 ß, eumque resolvo in 12 ₰: Itaque 9 de 4 & 12 seu 16, manent 7. Rursus 12 & 1 seu 13 de 3 non possunt: igitur 13 de 16 & 3, (eos 16 ß sumo è vicinia: unam sc. marcam resolutam in 16 ß) seu 19, supersunt 6. Denique de 5 remanent 2. Tota summa 2 ₰ 6 ß 7 ₰.*

₰	ß	₰
5	3	4
2	12	9
₰	ß	₰
2	6	7

COROLLAR.

Si ordo specierum non fuerit continuus sed interruptus in alterutro numero, (quæ animadversio in additione quoq; locum habet) tum numeri unius nominis subscribantur sibi invicem, & vacui spacium repleatur cyphris: quemadmodum vides in hoc exemplo.

0	I	II	III
25	00	45	13
6	18	00	23
18	42	44	50

PROP. IV.

Numeros Astronomicos in vicem multiplicare.

1. *Prima ratio multiplicandi scrupula.*
2. *Secunda ratio.*
3. *Explicatio Tabulæ sexagenariæ.*
4. *Regula de speciebus emergentibus ex Multipl.*

MUltiplicatio Minutiarum *variis modis* potest expediri.

1. *Duo sunt usitatiores.* I. Si offeruntur numeri *ejusdem speciei* & denominationis, ducatur alter in alterum vulgari

o o o
ratione, *ut* 15 *multiplicati per* 3, *dant* 45. *Itidem*

I' I'
dem 20 *per* 16, *dant* 320 *Numerus productus si major fuerit quam* 60, *dividatur per* 60. *Ita*

I. II.
320 *æquivalent* 5 20. At v. ubi *diversa* inter se multiplicãdæ species, gradus, minuta, sexagenæ: tũ necesse ut prius species major resolvatur in minorẽ, gradus in minuta prima, hæc in secũdã, quæ resolutio fit multi-

plica-

plicatione per 60. Ut: sint $5^{0}, 21^{I}$ multipl. per 3^{0}; Reducatur 5^{0} ad minuta, facta per 60 multipl.: (quia 1^{0} dat 60^{I}) fiunt 300: quibus addantur 21, fiunt 321^{I}. Eadem lege resolvantur 3^{0} in minuta, fiunt 180^{I}. Jam hos duos numeros multiplica proveniunt 57780^{II} (Nam 1 multipl. per 1, dat 11) Et summa quot minuta facit, si scire vales, dividatur per 60, proveniunt 963: quæ si iterum diviseris per 60, habebis 16^{0}—3.

		3	2	1
		1	8	0
2	5	6	8	0
3	2	1		
5	7	7	8	0

2. Hæc prima est multiplicandi ratio, operosa & perquam molesta, Quippe quæ aliquot multiplicationib. & divisionibus opus habet, imprimis si multæ species sint multiplicandæ. Auctores ut consulerent studiis juvenū, & minuerent laborem, cōfecerūt *Tabulam* quandam *sexagenariam*, quæ

quæ continet omnes Minutias, quæ ex multiplicatione & divisione resultare possunt.

3. Hæc tabula duabus constat partibus inter se distinctis: superiori Triangulari; Et inferiori ferè quadrata, aut figura Trapezii. *Usus* illius talis est. Species multiplicandæ vel minores sunt quàm 30, vel majores. Si vel utraque vel alterutra minor, utimur Trapezio: Si ambæ majores, Triangulo. Quærantur igitur numeri multiplicandi, alter vel in superiori parte Trapezii, vel Trianguli: alter in latere vel dextro vel sinistro. Communis cellula dabit quæsitum. Si plures sint multiplicandi, ultimus in cellulâ inventus numerus (sunt enim ferè duo) subscribatur justò multiplicando, alter, qui primus est, ei versus sinistram præponatur. Exemplis docebimus rem, ubi primum dederimus Regulas de speciebus ex multiplicatione emergentibus. Nam cùm gradus multiplicantur per minuta, non cuilibet notum, quid inde proveniat? Gradusne, an minuta? Observentur in eam rem quæ sequuntur.

4. *Re-*

4. Regula de speciebus provenientibus.

1. Gradibus multiplicatis per gradus, proveniunt gradus.

2. Cum gradus multiplicantur in minuta vel sexagenas, nascuntur non gradus, sed minuta vel sexág.

3. Si Minuta multiplicentur per minuta, nascuntur minuta talia, qualia indicant notæ additæ singulorũ minutorum. Ut prima per prima, dant secunda: prima per secunda, dant tertia. Idem intelligendum, de sexagenis.

4. Si Minuta & sexagenæ inter se multiplicantur, quæ æqualiter distant à gradibus, e.g. sexag. secundæ per minuta secunda, nascuntur gradus.

5. Si minuta multiplicantur per sexagenas, quæ inæqualiter distant à gradibus, e.g. Min. prima per sexag: secund: tum auferenda est nota speciei minoris à nota majori, & nota quæ relinquitur convenit producto.

EXEM-

EXEMPLA.

I. Sint multiplicandæ hæ minutiæ Astro-
\ 0 \ I I
nomica, 15, 28, 12, per 18. Locentur 18 ad dextram loco ultimo & hinc subtracta, invenio si 18 (I) ducantur in 12, resultare 11 (II) per Reg. 3. Appingo ergò nomen minutorum secundorum 11, atque ordine versus sinistram, notas succedentes, 1. 0. \. Jam in Tabula sexagenaria, in superio-

	\	0	I
	15	28	12
			I
			18
\	0	I	II
		3 —	36
	8 —	24	
4 —	30		
\	0	I	II
4	38	27	36

ri vel inferiori latere Trapezii, quæro alter-

utrum

utrum ex his numeris, vel 12 *vel* 18: *& in latere dextro alterum*; melius tamen fuerit minorem semper superius, majorẽ in latere quærere; *communis concursus dat* 3—36, *è quibus posterior* (36) *subscribẽdus nota multiplicanda* 12: *prior* (3) *ei præponendus versus sinistram. Rursus duco* 18 *in* 28; *qua quæsita in tabula dant in communes concursus area*, 8—24. *E quibus* 24 *scribenda sub nota multiplicanda* 28: *Et* 8 *loco proximo versus sinistram. Sic porrò etiam* 18 *ducta in* 15, *faciunt in tabula* 4—30. *ita scribenda ut præcepi. Iis expeditis subducatur linea; numeriq; inter duas lineas conclusi colligantur in unam*

o I II

summam: Fiunt 4, 38, 27, 36, *productum scilicet quod quærebatur.*

II. Si multiplicans *duas vel tres* habuerit *species*, tum *primò* prima ducatur in omnes numeros superiores, ut jam fecimus. *Dehinc secunda* eodem planè modo: *Tum* tertia, & cæteræ, si quæ fuerint, veluti in exemplo factum vides.

Pro

0	I	II	III
21	59	16	40
		0	I
		19	36

\	0	I	II	III	IV	
				24—	0	*Pro prima figura multiplicantis (36)*
			9—	36		
		35—	24			
	21—	36				
			11—	40		*Pro secundo multiplicante (19)*
		5—	4			
	18—	41				
6—	39					

\	0	I	II	III	IV	
7	10	57	50	40	0	*Productum ex additis omnibus sup.*

PROP. V.

Numeros Astronomicos dividere.

Divisio eadem facilitate *per Tabulam sexagenariam* absolvitur. *Initiò* divisor quæritur in Tabulæ lateribus, dextro aut

aut sinistro. *Hinc* rectâ itur sequendo ductum columnarum, donec se offerat dividendus, qui si præcisè non inveniatur, sumendus proximè minor; quo invento, mox vel superius in capite columnæ, vel inferius in calce reperietur quotiens: & protenus in divisorem multiplicandus, & cum instituenda subtractio, ut in divisione jam olim docuimus. Priusquam exempla dem, notandæ sunt Regulæ de Specie emergente ex divisione.

Regulæ de Speciebus emergentibus.

1. Gradu diviso per gradus, resultant gradus.

2. Gradu diviso per minuta aut sexag. vel vice versâ, resultant minuta vel sexag.

3. Minutis divisis per alia minuta, si æqualiter distent ab integro, fiunt integra.

4. Si ab integro distent æqualiter auferatur nota minor à majori: Et relicta nota est nota emergens.

5. Minutis divisis per minuta, emergit spe-

species, quam indicat additæ utrorumque notæ.

EXEMPLA.

Sint dividendi 22, 45, 36, per 16, quæ sic locentur, ut factum vides. Quia hic gradus dividendi per gradus, colligo primam emergentem speciē esse gradus, quos ordine sequuntur reliqua.

6	5		
0	I	II	
22	45	36	0
0			1
16	16	16	
16			25
6	48	36	
	5		21

Quæro in Tabula sexagenaria latere sinistro 16. & rectâ, progrediendo versus dextram, potenus invenio in cella prima 0—16, in altera 0—36. Dividendus verò noster est 22: quem quia exactè non reperio, sumo proximè minorem, 0—16. vel: 16. Respondet in columna extremitate 1. Hic est primus quotiens post lineam scribendus. Fiat multiplicatio divisoris in hunc quotientem; manent 16. Fiat subtractio 16 de 22, supermanent 6, superscribenda. Promovetor divisor. Quæritur 16 quoties in 6—45 suprapositis? In vertice

Ta-

Trapezii quæro 16, in columna descendente quæro dividendum 6—45, qui quia non extat precisè, excerpo proximè minorē 6—40, cui à latere respondent 25, secundus quotiens. Multiplicatis 25 in divisorem 16, proveniunt 6—40, quæ ablata à superioribus 6—45 relinquunt 5. Postremò promotus divisor 16 quæritur quoties contineatur in 5—36. Inventis in vertice Trapezii 16, descendendo reperio exactè 5—36, quibus à latere respondent 21. Quotiens tertius: Multiplicata 16 in 21 faciunt 5—36, quæ subtracta à superioribus 5—36 relinquunt nihil. Summa igitur

0 I II.

quæsita est I. 25. 21.



APPEN-



APPENDIX.

De Arithmetica per Circinum Proportionalem demonstrandâ; & usui accommodanda.



Mice Lector, videbat Typographus, aliquid adhuc spacii superfuturum in postremâ hac papyro; itaque rogavit, ne illud paterer manere vacuum. Quam gratiam ei gratificaturus, dedi pagellas aliquot Scripti cujusdam, quod nuper Frater meus, *JOHAN. LAUREMBERG. Doct: & Professor Academiæ Rostochiensis*, de Organo Analogico, vel Circino Proportionum vulgavit; in quo demonstravit modum & Methodum, plerasque Arithmetices Regu-

Regulas expediendi & tractandi, beneficio illius instrumenti. Illud argumentū ego quam maximè in rem præsentem esse existimavi. Circinus ipse satis notus est & nullius non manibus tractatur. Pluribus quidem constat lineis, quæ suos singulæ usus habent, & eo libello compendiosè explicantur. sed hujus imprimis negotii sunt lineæ Arithmeticæ reliquarum simplicissimæ & primæ, tum Geometricæ, & Stereometricæ, de quibus ita habet Frater.

ARITHMETICA.

ANimadvertendum hic primò, exiguitatē organi non capere numerorum magnam molem: sed si proponantur numeri majores, ad proportionem eos esse revocandos.

I.

ADDITIO.

Additio sic perficitur: Sint addenda

280. 340. 365: Primò in lineâ Arithmeticâ circino vulgari capio quantitatem 280, eamque ad 340 colloco expanso circino versùs apices, notatoque quod tangit puncto. Deinde 365 summo in eadem lineâ Arithmetica, eaque statuo ad punctum prius inventum, & monstrabit circini pes alter expassus 985, summam propositi numeri.

Colligantur in unum 5000. 3400. 1200. Abjectâ ziphrâ unâ, & factâ operatione ut prius, reperio 9600.

II.

SUBTRACTIO.

Subtractio simili modo se habet. Sint auferenda 200 ex 865: capta circino 200, colloco ad punctum 865, & expanso circino versus centrum, ejus pes alter indicat 665. Sic 3420. & 2100 ablata à 9000, (conjunctis prius 3420 & 2100. hoc est, 5520, & abjectâ ziphrâ) relinquunt 408, redditaque ziphrâ prius ablatâ efficiunt 4080.

III. Mul-

III.

MULTIPLICATIO, DIVISIO, ET REGULA TRIUM.

Multiplicatio & divisio seorsim per eam lineam perficiuntur, quæ ab altera parte organi cernitur: conjunctim verò exprimuntur in Regula trium, seu Proportionum, cujus hæc est operatio: Si 160 dant 240, quantum dabunt 200? In linea Arithmetica directè capito secundum numerum, scilicet 240: eumq; transversè applica ad primum, nempè 160: immota deinde instrumento, sume tertium numerum transversè, videlicet 200, qui in lineam Arithmeticam translatus ostendit 300, numerum quæsitum. Vel tertium sume directè, & applica transversè ad primum: deinde secundus transversè sumptus in linea Arithmetica mōstrabit eundem numerum.

Hic quoq; observandū, si numeri propositi aut exigui sunt nimis, aut nimis

mutationem monstrarum. Sint transmutandi floreni 300 in thaleros imperiales. Valor flor. est 24 sol. thaleri 60 Igitur directè accipio 24, vel adjecta ziphrâ 240. transversè 60, vel 600: deinde immoto instrumento, 300 transversè sumpta monstrant in lineâ Arithmeticâ 120. Sic 645 solidi mutantur in 516 grossos positis 15 nummis pro grosso, & 12 pro sol. Et 250 stadia, conficiunt 31 milliaria, positis 125 passibus pro stadio, & 1000 pro milliari.

V.
EXTRACTIO RADICIS QUADRATÆ.

Extractio Radicis quadratæ, difficilis in Arithmeticâ, facillimè hoc organo perficitur: illud modò notetur; aliam esse minorum numerorum operationem, aliam majorum. Minores verò qui à 5000 non procul absunt. In his ita instituitur operatio. In lineâ Arithmeticâ sum-

sumptum spatium 40, statuitur inter 16 & 16 linea Geometrica, atque ita relinquitur instrumentum. Deinde à numero proposito duas ultimas ad dextram notas abjice, & relictum numerum in linea Geometrica transversè accipito, qui translatus in lineam Arithmeticam, Radicem quadratam proximam ostendit. Hac ratione Radix quadrata ex 3025 invenitur 55: Ex 4532, radix proxima reperitur 67.

Milites 4000 statuendi sunt in aciem quadratam: quot singula latera occupabunt? Factâ operatione, radix proxima reperitur 36, & reliqui sunt 31.

Altera ratio in numeris majoribus locum habet: In lineâ Arithmeticâ accipitur spatium 100, idq; transversè statuitur inter 10 & 10 lineæ Geometricæ: deinde abjectis figuris tribus ultimis, quod relinquitur, in linea Geometrica quæritur transversè: inventumq;, &

applicatum lineæ Arithmeticæ, monstrat Radicem quadratam. Sic Radix quad. è 48400 reperitur 220: Ex 90000, Radix est 300.

Pavimenti quadrati area, 32400 pedes continet; quænam est longitudo ejus & latitudo? 180.

Acies non quadrata ita construitur. Sint milites 5000, ita statuendi, ut quoties à fronte 5, toties à latere sint tres. Proportio lateris & frontis est, uti 5 ad 3. seu 50 ad 30. Pro fronte igitur reperienda, directè capiantur 50, & transversè accomodentur ad numerum qui fit ex multiplicatione terminorum proportionalium: uti hic ad 15: atq; ita relinquitur instrumentum: Posteà abjectis à numero proposito duabus ziphris, 50 in linea Geometrica capiuntur transversè, quæ directè in linea Arithmetica ostendunt 100, pro fronte Latus invenitur, si propositus numerus dividatur per

fron-

frontem, hoc est, 5000 per 100, provenient 50 pro latere.

VI.

EXTRACTIO RADICIS CUBICÆ.

Extractio Radicis cubicæ eodem ferè modo in Stereometricis lineis perficitur, quo quadrata in Geometricis. Ad numeros mediocres, qui detractis tribus postremis notis, non excedunt 150, in linea Arithmetica capitur distantia 40, quæ in Stereometricis statuitur inter 64 & 64. Relicto in hoc situ instrumento, tres figuræ ultimæ abjiciantur, & relictus numerus transversè in Stereometricis lineis acceptus, atq; Arithmeticæ directè applicitus, Radicem cubicam demonstrat. Sic Radix cubica proxima è 9125, reperitur 20. Ad majores numeros, distantia directa 100, transversè inter 100 & 100 Stereometricæ lineæ locatur, & abjectis 4 figuris ultimis, simili modo ut prior, operatio insti-

instituitur, ita Radix cubica è 2 600, est 27 Fractiones numerorum ad segmenta lineæ rectæ pertinent, quæ in altero organi latere traduntur.

VII.

INVENTIO NUMERI MEDII PROPORTIONALIS.

Media proportionalis ita reperitur: sint duæ lineæ aut numeri, 24 & 54, quos inter media proportionalis quæritur: in Arithmetica linea accepta 54 transversè statuuntur inter 54 & 54 lineæ Geometricæ: & in eadem linea Geometrica transversè sumpta 24, directè monstrant 36, numerum quæsitum.

FINIS.

In gratiam tyronum annectitur hic Tabulâ Pythagorica vulgari modo constructa.

Semel	1.	est	1.
Bis	2.	ſunt	4.
2	3		6.
2	4		8
2	5		10
2	6		12
2	7		14
2	8		16
2	9		18
2	10		20.
Ter	3	ſunt	9
3	4		12
3	5		15
3	6		18
3	7		21
3	8		24
3	9		27
3	10		30.
Quater	4	ſunt	16
4	5		20
4	6		24
4	7		28
4	8		32

